

Ф. ТРИКОМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ



INTEGRAL EQUATIONS

F. G. TRICOMI
professor of mathematics
University of Turin, Turin, Italy

1957

INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., NEW YORK
INTERSCIENCE PUBLISHERS LTD., LONDON

Ф. ТРИКОМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перевод с английского

Б. В. БОЯРСКОГО и И. И. ДАНИЛЮКА

Под редакцией

И. Н. ВЕКУА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА, 1960

АННОТАЦИЯ

Автор — итальянский ученый Ф. Дж. Трикоми — является весьма крупным специалистом в ряде областей анализа. Он хорошо известен советскому читателю по переводам двух его монографий: «Уравнения смешанного типа» и «Лекции по уравнениям в частных производных». Новая книга автора посвящена разделу математики, важному для приложений — к интегральным уравнениям приводится большое число задач самых разных разделов физики и техники. Книга начинается с изложения теории уравнений типа Вольтерра и Фредгольма, затем излагается теория симметричных ядер и, наконец, рассматриваются некоторые типы сингулярных и нелинейных уравнений, особо важные для приложений. Даже при изложении классических вопросов автор находит новые, зачастую неожиданные соображения.

Книга написана весьма просто и живо и может служить пособием для студентов и аспирантов математиков и физиков, а также для лиц инженерных специальностей.

Немало интересного найдут в ней и специалисты-математики.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я весьма польщен, что и эта моя книга будет опубликована на русском языке. Это особенно приятно для меня, ибо на русском языке имеется ряд хороших трактатов по интегральным уравнениям. Среди них, пожалуй, ближе всего к моей книге — книга С. Г. Михлина. Впрочем, эти две книги скорее дополняют друг друга, нежели конкурируют между собой. Действительно, в то время как я лишь слегка касаюсь приложений (сведя их к минимуму, неизбежному для понимания основных методов), в книге Михлина приложения занимают около двух третей объема и представляют значительный самостоятельный интерес.

Напротив, я уделяю достаточно много места уравнениям типа Вольтерра, которые я излагаю независимо, не смотря на то, что их можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма. Делаю я это не только из-за большой важности уравнений Вольтерра в теории дифференциальных уравнений, но в первую очередь из дидактических соображений, поскольку предварительное изучение этих уравнений является наилучшей подготовкой к успешному усвоению более трудных уравнений типа Фредгольма.

Проф. д-р Франческо Дж. Трикоми

Турин, 10 июня 1958 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Интегральные уравнения были одной из первых областей математики, привлечших к себе мое внимание, однако эта книга появляется только теперь, после ряда других книг. Почему? Да по той причине, что написание книги по интегральным уравнениям представляется довольно трудным делом, требующим многолетних размышлений.

В самом деле, такая книга должна удовлетворять двум не легко примирым между собой требованиям. С одной стороны, чтобы облегчить применение теории к доказательствам существования, она должна содержать главные результаты теории, изложенные с достаточной общностью и в соответствии с современными нормами математической строгости. С другой стороны, она не должна быть настолько абстрактной, чтобы отталкивать физиков и инженеров, определенно нуждающихся в этом математическом орудии.

Удалось ли мне удовлетворить обоим требованиям? Это может решить только читатель. Я могу лишь надеяться, что если я и не всегда успешно справлялся с задачей доступного изложения трудных вопросов, то по крайней мере меня не смогут обвинить в искусственном усложнении простых вопросов, как это делается иногда в математических сочинениях.

В моем стремлении примирить общность с простотой большую услугу оказала идея, выдвинутая моим другом,

проф. М. Пиконе¹⁾. Несмотря на то, что эта идея применялась уже Э. Шмидтом, одним из основателей теории интегральных уравнений, она до сих пор мало известна. Она позволяет при помощи ряда Неймана легко перейти от интегрального уравнения с «вырожденным» ядром к уравнению с ядром общего вида.

То здесь, то там, особенно в последней главе, специалист встретит новые факты, или же старые в новой форме: например, теория интегральных уравнений Вольтерра излагается в пространстве L_2 , вместо пространства непрерывных функций. Однако, вообще, я избегал изменения традиционного материала, в изложении которого достигнута удовлетворительная систематичность. Кроме того, я считаю, что книга, подобная моей, должна содержать, за редким исключением, только вопросы и методы, уже достаточно хорошо установившиеся в рамках анализа. По этой причине я не использовал современных топологических методов функционального анализа; возможно это удастся сделать в последующих изданиях. Как это ни было неприятно, но во избежание разрастания объема книги мне пришлось исключить из рассмотрения ряд вопросов; например, изложение применений интегральных уравнений с какой бы то ни было степенью полноты потребовало бы изложения значительной части математической физики и современной теории колебаний.

Эта книга писалась в расчете на то, чтобы служить современным учебником по интегральным уравнениям для студентов, а также для всех лиц, имеющих дело с прикладной математикой. По этой причине я стремился обойтись минимумом математических знаний, требуемых от читателей; твердые знания основ дифференциального и интегрального исчисления и элементов теории функций вполне достаточны.

¹⁾ Picone M., *Appunti di analisi superiore*, Napoli, 1940.

Книга состоит из четырех глав, каждая из которых делится на несколько параграфов (последовательно пронумерованных 1.1, 1.2, . . . , 4.7) и двух Приложений (I и II).

Формулы пронумерованы последовательно в рамках каждого параграфа или Приложения и ссылка в том же параграфе делается только на их номер. В других параграфах к их номеру прибавляется номер параграфа. Например, (4.3.4) означает (вне § 4.3) формулу (4) из § 4.3.

Я глубоко обязан моему другу д-ру Ч. де Прима, который, со своей необыкновенной компетентностью в этой области, дал мне много ценных советов не только математического, но и языкового характера.

Я благодарен также мисс Р. Струик, потратившей много времени на отделку рукописи.

Ф. Дж. Трикоми

Турин, Италия, февраль 1955 г.

Глава I

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

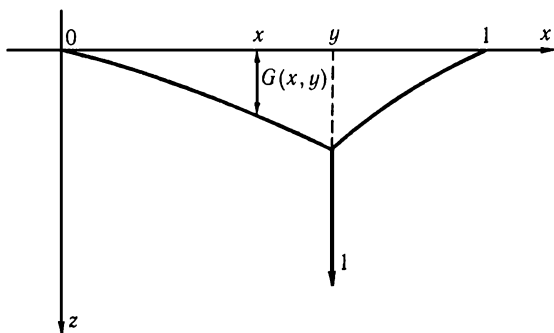
1.1. Задача механики, приводящая к интегральному уравнению

Интегральные уравнения являются одним из наиболее плодотворных средств математического исследования как в чистом, так и в прикладном анализе. Это относится, в частности, к задачам теории механических колебаний и соответствующих областей техники и теоретической физики, где интегральные уравнения не только полезны, но зачастую даже совершенно необходимы для численных расчетов.

Представляется полезным проиллюстрировать на простом примере тесную связь между математической теорией, которая составляет основной предмет этой книги, и задачами из прикладных наук. Хорошо известно, что если скорость вращающегося вала постепенно возрастает, то при определенном ее значении (которое иногда может быть значительно меньше максимальной допустимой скорости) вал подвергается все более неустойчивым колебаниям. Конечно, это явление наблюдается тогда, когда скорость вала достаточно велика для того, чтобы при соответствующей деформации вала возникающая центробежная сила вполне уравновешивала упругие восстанавливающие силы вала.

Для того чтобы определить возможные «критические» скорости вала, можно использовать простой, но достаточно общий факт из теории упругих балок: для произвольной упругой балки при произвольных условиях на концах всегда существует однозначно определенная *функция влияния* G , которая описывает отклонение балки в данном направлении γ (например, в направлении Oz , см. рис. 1) в произвольной точке P балки, вызванное единичной нагрузкой, приложенной в некоторой другой точке Q и действующей по направлению γ . Если сечения балки приве-

дены во взаимно однозначное соответствие с точками интервала $0 \leq x \leq 1$, то G представляет собой симметричную¹⁾ функцию $G(x, y)$ абсцисс x и y точек P и Q соответственно. Следовательно, из принципа суперпозиции



Р и с. 1.

в теории упругости вытекает, что если $p(x)$ есть произвольное непрерывное распределение нагрузки вдоль балки²⁾ то соответствующее отклонение будет

$$z(x) = \int_0^1 G(x, y) p(y) dy \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

Если рассматривается вал, вращающийся вокруг оси x , и если $z(x)$ представляет собой отклонение центра тяжести сечения, соответствующего координате x , то распределение нагрузки для отклонения $z(x)$ и угловой скорости ω определяется соотношением

$$p(x) = \omega^2 \mu(x) z(x), \quad (2)$$

где $\mu(x)$ — линейная плотность массы вала. Поэтому равновесие упругой и центробежной сил будет иметь место при некоторой угловой скорости ω тогда и только тогда, когда существует не равное нулю отклонение $z(x)$, удов-

¹⁾ Равенство $G(x, y) = G(y, x)$ является следствием принципа взаимности Бетти — Максвелла в теории упругости.

²⁾ Это означает, что нагрузка между x и $x + dx$ равна $p(x) dx$.

летворяющее уравнению

$$z(x) = \omega^2 \int_0^1 G(x, y) \mu(y) z(y) dy \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (3)$$

Таким образом, задача об определении критической скорости сводится к задаче об определении значений ω^2 , при которых предыдущее уравнение допускает ненулевое решение.

Это некоторое интегральное уравнение; точнее оно называется *однородным линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода с ядром $G(x, y) \mu(y)$* .

Используя тот факт, что $\mu(x) > 0$, полезно преобразовать уравнение (3) в уравнение того же вида, но с симметричным ядром. Для этого полагаем

$$\varphi(x) = \sqrt{\mu(x)} z(x), \quad \omega^2 = \lambda,$$

и непосредственно получаем уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (4)$$

ядро которого

$$K(x, y) = \sqrt{\mu(x) \mu(y)} G(x, y),$$

очевидно, симметрично.

Такое преобразование полезно тем, что, как будет показано ниже (гл. III), в случае *симметричного* ядра, вообще говоря, существует бесконечно много *собственных значений* (называемых также *характеристическими значениями*), т. е. значений λ , для которых уравнение имеет ненулевые решения, в то время как уравнение с несимметричным ядром может обладать, но может и не обладать собственными значениями.

1.2. Интегральные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений

Пусть $K(x, y)$ — заданная вещественная функция, определенная при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ¹⁾; $f(x)$ — заданная ве-

¹⁾ Для простоты мы будем обычно предполагать, что основной областью, в которой рассматриваются наши уравнения, является

щественная функция, определенная при $0 \leq x \leq 1$, а λ — произвольное комплексное число. Общим линейным *интегральным уравнением Фредгольма второго рода* относительно функции $\varphi(x)$ называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1)$$

а линейным *интегральным уравнением Фредгольма первого рода* — уравнение вида

$$\int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (2)$$

Задачу о решении уравнений (1) или (2) можно рассматривать как обобщение задачи о решении системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} x_s = b_r \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

В самом деле, если $K(x, y)$ и $f(x)$ — кусочно-постоянные функции, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} K(x, y) &= k_{rs} \quad \left(\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n}, \quad \frac{s-1}{n} < y \leq \frac{s}{n} \right), \\ f(x) &= f_r \quad \left(\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n} \right) \quad (r, s = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\varphi(x) = f_r + \lambda \sum_{s=1}^n k_{rs} \int_{(s-1)/n}^{s/n} \varphi(y) dy \quad \left(\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n} \right), \quad (1')$$

$$f_r = \sum_{s=1}^n k_{rs} \int_{(s-1)/n}^{s/n} \varphi(y) dy \quad \left(\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n} \right) \quad (2')$$

интервал $0 \leq x \leq 1$. Замена его интервалом $a \leq x \leq b$ или даже произвольным ограниченным (измеримым) множеством оси x повлечет за собой лишь незначительные изменения рассуждений. Чтобы не загромождать изложение в этом вводном параграфе излишними подробностями, мы будем предполагать, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям, при которых применяемые операции законны.

соответственно. Уравнение (1') показывает, что если решение $\varphi(x)$ существует, то оно также должно быть кусочно-постоянной функцией, т. е.

$$\varphi(x) = \varphi_r \quad \left(\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n} \right);$$

поэтому мы можем записать уравнение (1') следующим образом:

$$\varphi_r - \frac{\lambda}{n} \sum_{s=1}^n k_{rs} \varphi_s = f_r \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (1'')$$

Следовательно, если определитель матрицы с элементами

$$\delta_{rs} - \frac{\lambda}{n} k_{rs} \quad \left(\delta_{rs} = \begin{cases} 0, & r \neq s, \\ 1, & r = s \end{cases} \right)$$

не обращается в нуль, то система (1''), а следовательно, и уравнение (1') имеют единственное решение при любой заданной кусочно-постоянной функции $f(x)$.

По-другому обстоит дело для системы (2'). В этом случае уже нельзя утверждать, что решение $\varphi(x)$ обязательно должно быть кусочно-постоянной функцией. Если положить

$$n \int_{(s-1)/n}^{s/n} \varphi(y) dy = x_s,$$

то система (2') примет вид

$$f_r = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n k_{rs} x_s \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (2'')$$

Поэтому исследование системы (2') в отличие от системы (1') наталкивается на существенные внутренние трудности: даже если определитель матрицы $\|k_{rs}\|$ отличен от нуля и система (2'') имеет единственное решение, система (2') будет иметь *бесконечно* много решений, поскольку однозначно определены только x_r — средние значения функции $\varphi(x)$ на последовательных интервалах $(0, 1/n), (1/n, 2/n), \dots$. Эти простые рассуждения предвещают серьезные трудно-

сти, которые могут встретиться при изучении интегральных уравнений *первого* рода.

С несколько иной точки зрения интегральное уравнение можно рассматривать как *предельный случай* системы вида (1') или (2').

1.3. Уравнения Вольтерра

Во избежание некоторых трудностей из числа указанных в предыдущем параграфе Вито Вольтерра¹⁾ рассмотрел решения интегральных уравнений, ядра которых удовлетворяют условию

$$K(x, y) \equiv 0, \text{ если } y > x. \quad (1)$$

Это соответствует (в смысле предыдущего параграфа) тому простому случаю системы линейных алгебраических уравнений, когда все элементы матрицы коэффициентов, лежащие над главной диагональю, равны нулю. Интегральные уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (2)$$

и

$$\int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (3)$$

¹⁾ Основоположниками теории *интегральных уравнений* являются Вито Вольтерра (1860—1940) и Ивар Фредгольм (1866—1927), а также Давид Гильберт (1862—1943) и Эрхард Шмидт (род. 1876 г.). Вольтерра был первым, кто увидел всю важность этой теории и рассмотрел ее систематически. Вклад Фредгольма, собственно говоря, состоит в *преодолении* трудности, связанной с обращением в нуль «определителя коэффициентов» (около 1900 г.). Правда, приоритет Вольтерра был бы еще более неоспоримым, если бы его первая работа, посвященная этим вопросам (1896 г.), была написана по-другому. Вместо подробного изложения своих результатов и методов, которые к ним привели (и которые совпадают с методами, так успешно использованными впоследствии Фредгольмом), Вольтерра опубликовал только проверку своего решения. Это рассказал мне сам Вольтерра, когда я в 1924—1925 гг. впервые читал лекции по интегральным уравнениям в Римском университете.

называются *интегральными уравнениями Вольтерра* соответственно второго и первого рода. Мы начнем с рассмотрения этого сравнительно простого, но важного класса уравнений, при изучении которого уже вырисовываются характерные черты общей теории.

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода¹⁾ легко решается методом последовательных приближений Пикара. Полагаем сначала $\varphi_0(x) = f(x)$ и определяем $\varphi_1(x)$ соотношением

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) f(y) dy.$$

Продолжая действовать таким же образом, получаем бесконечную последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (4)$$

удовлетворяющих рекуррентным соотношениям

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Более того, полагая

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \lambda^n \psi_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

мы замечаем, что

$$\varphi_n(x) = \sum_{v=0}^n \lambda^v \psi_v(x), \quad (7)$$

[где $\psi_0(x) = f(x)$], а

$$\psi_n(x) = \int_0^x K(x, y) \psi_{n-1}(y) dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

так что

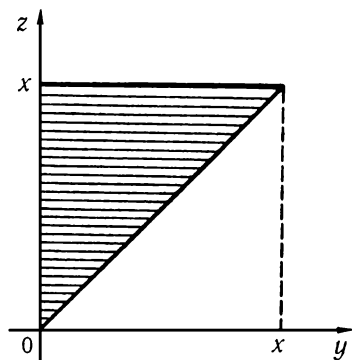
$$\psi_1(x) = \int_0^x K(x, y) f(y) dy$$

¹⁾ Интегральные уравнения Вольтерра первого рода будут рассмотрены в § 1.6.

II

$$\psi_2(x) = \int_0^x K(x, z) dz \int_0^z K(z, y) f(y) dy.$$

Этот повторный интеграл можно рассматривать как двойной интеграл по заштрихованной области, изображенной



Р и с. 2.

на рис. 2; таким образом, меняя порядок интегрирования, мы получаем

$$\psi_2(x) = \int_0^x f(y) dy \int_y^x K(x, z) K(z, y) dz,$$

или

$$\psi_2(x) = \int_0^x K_2(x, y) f(y) dy,$$

где

$$K_2(x, y) = \int_y^x K(x, z) K(z, y) dz.$$

Аналогично устанавливается, что вообще

$$\psi_n(x) = \int_0^x K_n(x, y) f(y) dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

где итерированные ядра

$$K_1(x, y) \equiv K(x, y), K_2(x, y), K_3(x, y), \dots$$

определяются при помощи рекуррентной формулы¹⁾:

$$K_{n+1}(x, y) = \int_y^x K(x, z) K_n(z, y) dz \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Кроме того, легко видеть, что

$$K_{n+1}(x, y) = \int_y^x K_r(x, z) K_s(z, y) dz$$

$$(r = 1, 2, \dots, n; s = n - r + 1). \quad (10)$$

Доказательство может быть проведено по индукции: можно показать, что если эта формула имеет место для $r + s \leq n$ и для пары значений $r_0, s_0, r_0 + s_0 = n + 1$, то она также имеет место для $r = r_0 + 1$ и $s = s_0 - 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_y^x K_{r_0}(x, z) K_{s_0}(z, y) dz = \\ &= \int_y^x K_{r_0}(x, z) dz \int_y^z K(z, u) K_{s_0-1}(u, y) du = \\ &= \int_y^x K_{s_0-1}(u, y) du \int_u^x K_{r_0}(x, z) K(z, u) dz = \\ &= \int_y^x K_{r_0+1}(x, u) K_{s_0-1}(u, y) du. \end{aligned}$$

Таким образом, естественно ожидать, что мы получим решение уравнения (2) в виде суммы (если она существует) бесконечного ряда, частные суммы которого определяются формулой (7). Однако, используя рекуррентную

¹⁾ Заметим, что $K_n(x, y) \equiv 0$ при $y > x$, поскольку $K(x, z) \equiv 0$ при $z > x$.

формулу (9), мы можем записать соотношение (7) следующим образом:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x \left[\sum_{\nu=1}^n \lambda^\nu K_\nu(x, y) \right] f(y) dy;$$

следовательно, естественно ожидать, что решение уравнения (2) будет иметь вид

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy, \quad (11)$$

где $H(x, y; \lambda)$ — *резольвентное ядро (резольвента)*, определяемое при помощи ряда

$$H(x, y; \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y). \quad (12)$$

1.4. L_2 -ядра и L_2 -функции

Как мы увидим ниже, метод последовательных приближений применим к большому числу интегральных уравнений, а не только к уравнениям Вольтерра. Поэтому целесообразно изучить сходимость этого метода при не слишком ограничительных предположениях о ядре $K(x, y)$ и функции $f(x)$. Хотя эти предположения весьма широки, все же они окажутся достаточными для применимости указанного метода (и не только этого метода) к интегральным уравнениям Фредгольма.

Используя хорошо известное *неравенство Буняковского — Шварца*¹⁾

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \quad (1)$$

¹⁾ Это важное неравенство (которое может быть также распространено на кратные интегралы и т. д.) легко доказывается

которое играет важную роль в излагаемой ниже теории, мы можем снять обычное предположение о непрерывности (а следовательно, и ограниченности) ядра $K(x, y)$, предположив, что $K(x, y)$ принадлежит пространству L_2 . Именно, мы будем предполагать, что ядро $K(x, y)$ *интегрируемо с квадратом* по области $(0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq h)$, где h — некоторая положительная постоянная, т. е. что интеграл

$$\|K\|^2 = \int_0^h \int_0^h K^2(x, y) dx dy \leq N^2 \quad (2)$$

существует (по крайней мере в смысле Лебега¹⁾) и не превосходит некоторой постоянной N^2 . Такое ядро будет называться L_2 -ядром, а $\|K\|$ — его *нормой*.

Мы будем также предполагать, что функция $f(x)$, стоящая в правой части нашего интегрального уравнения, всегда является L_2 -функцией, т. е. что ее норма $\|f\|$, определяемая формулой

$$\|f\|^2 = \int_0^h f^2(x) dx, \quad (3)$$

существует и конечна.

Тот факт, что $K(x, y)$ является L_2 -ядром, влечет за собой несколько важных следствий. Во-первых, из тео-

с помощью неотрицательной квадратичной формы относительно ξ, η :

$$\int_a^b [\xi f(x) + \eta g(x)]^2 dx = \xi^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\xi\eta \int_a^b f(x)g(x) dx + \eta^2 \int_a^b g^2(x) dx.$$

Знак равенства в нем достигается тогда и только тогда, когда частное $f(x)/g(x)$ равно постоянной почти всюду на интервале (a, b) . В предыдущих формулах мы писали $f^2(x)$, $g^2(x)$ и т. д. вместо $[f(x)]^2$, $[g(x)]^2$ и т. д., и будем часто поступать таким же образом в дальнейшем.

¹⁾ В этой книге «интегрируемость» всегда означает интегрируемость по Лебегу. Если читатель недостаточно хорошо знаком с этим понятием, он может без ущерба для понимания предполагать интегрируемость по Риману почти во всех последующих рассуждениях. По этому вопросу см. полезные замечания в предисловии к книге Харди, Литтльвуда и Полиа «Неравенства» [54].

ремы Фубини¹⁾ вытекает, что функции

$$A(x) = \left[\int_0^h K^2(x, y) dy \right]^{1/2}, \quad B(y) = \left[\int_0^h K^2(x, y) dx \right]^{1/2} \quad (4)$$

существуют соответственно для почти всех x , $0 \leq x \leq h$, и для почти всех y , $0 \leq y \leq h$, что эти функции принадлежат классу L_2 и, наконец, что имеют место равенства

$$\|K\|^2 = \int_0^h A^2(x) dx = \int_0^h B^2(y) dy. \quad (5)$$

Во-вторых, если $\Phi(x)$ — произвольная L_2 -функция на интервале $(0, h)$, то и следующие две функции:

$$\psi(x) = \int_0^h K(x, y) \Phi(y) dy, \quad \chi(y) = \int_0^h K(x, y) \Phi(x) dx \quad (6)$$

также являются L_2 -функциями. Это непосредственное следствие неравенства Буняковского — Шварца; более того, согласно этому неравенству,

$$\|\psi\| \leq \|K\| \cdot \|\Phi\|, \quad \|\chi\| \leq \|K\| \cdot \|\Phi\|. \quad (7)$$

Аналогичным образом можно показать, что композиция двух L_2 -ядер $K(x, y)$ и $H(x, y)$, т. е. образование двух новых ядер по формулам²⁾

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= \int_0^h K(x, z) H(z, y) dz, \\ G_2(x, y) &= \int_0^h H(x, z) K(z, y) dz \end{aligned} \quad (8)$$

дает два новых L_2 -ядра, таких, что

$$\|G_1\| \leq \|K\| \cdot \|H\|, \quad \|G_2\| \leq \|K\| \cdot \|H\|, \quad (9)$$

¹⁾ См., например, Сакс С., Теория интеграла, М., 1949, стр. 118, или Goffman С., Real Functions, New York, 1953, p. 253. [См. также Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1947, стр. 210. — Прим. ред.]

²⁾ Вольтерра назвал бы (8) «композицией второго рода»; относительно композиции первого рода см. § 1.9.

и т. д. В частности, последние формулы дают полезную оценку для норм итерированных ядер

$$\|K_n\| \leq \|K\|^n, \quad (10)$$

что можно доказать методом индукции, воспользовавшись формулой (1.3.9).

Наконец, заметим, что иногда целесообразно накладывать более жесткие ограничения, а именно, предполагать, что функции (4) не только принадлежат классу L_2 , но также и ограничены. В этом случае мы будем говорить, что ядро K принадлежит классу L_2^* .

1.5. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода

Основной целью настоящего параграфа является обоснование результатов § 1.3. Для этого докажем следующую основную теорему.

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq h), \quad (1)$$

у которого ядро $K(x, y)$ и функция $f(x)$ принадлежат классу L_2 , имеет одно и только одно решение¹⁾ в том же классе L_2 . Это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy, \quad (2)$$

где резольвентное ядро $H(x, y; \lambda)$ определяется при помощи ряда, составленного из итерированных ядер

$$-H(x, y; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x, y). \quad (3)$$

¹⁾ Мы рассматриваем решения с точностью до так называемых нуль-функций, т. е. функций, обращающихся в нуль почти всюду. (Термин «почти всюду» означает, как обычно, «всюду, за исключением множества меры нуль».)

Ряд (3) сходится почти всюду. Резольвентное ядро удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} K(x, y) + H(x, y; \lambda) &= \lambda \int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz = \\ &= \lambda \int_y^x H(x, z; \lambda) K(z, y) dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Для доказательства покажем сначала, что в рассматриваемом случае можно получить более точную оценку для норм итерированных ядер, чем (1.4.10), не изменяя при этом основных предположений относительно заданного ядра.

В самом деле, при помощи неравенства Буняковского — Шварца мы сначала получаем

$$\begin{aligned} K_2^2(x, y) &= \left[\int_y^x K(x, z) K(z, y) dz \right]^2 \leq \\ &\leq \int_y^x K^2(x, z) dz \int_y^x K^2(z, y) dz \leq \\ &\leq \int_0^h K^2(x, z) dz \int_0^h K^2(z, y) dz = A^2(x) B^2(y), \end{aligned}$$

и далее последовательно

$$\begin{aligned} K_3^2(x, y) &\leq \int_y^x K^2(x, z) dz \int_y^x K_2^2(z, y) dz \leq \\ &\leq \int_0^h K^2(x, z) dz \int_y^x A^2(z) B^2(y) dz = \\ &= A^2(x) B^2(y) \int_y^x A^2(z) dz, \\ K_4^2(x, y) &\leq \int_y^x K^2(x, z) dz \int_y^x K_3^2(z, y) dz \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^h K^2(x, z) dz \int_y^x A^2(z) B^2(y) dz \int_y^z A^2(u) du = \\ &= A^2(x) B^2(y) \int_y^x A^2(z) dz \int_y^z A^2(u) du \end{aligned}$$

и т. д. В общем виде это записывается следующим образом:

$$K_{n+2}^2(x, y) \leq A^2(x) B^2(y) F_n(x, y) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где

$$F_1(x, y) = \int_y^x A^2(z) dz, \quad F_2(x, y) = \int_y^x A^2(z) F_1(z, y) dz, \quad \dots,$$

и вообще

$$F_n(x, y) = \int_y^x A^2(z) F_{n-1}(z, y) dz \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Теперь установим, что

$$F_n(x, y) = \frac{1}{n!} F_1^n(x, y) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Эта формула, очевидно, справедлива при $n = 1$. Если она верна для $n - 1$, то это имеет место и для n , поскольку из соотношений (6) следует, что

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x A^2(z) F_1^{n-1}(z, y) dz = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x F_1^{n-1}(z, y) \frac{\partial F_1(z, y)}{\partial z} dz = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} F_1^n(z, y) \right]_{z=y}^{z=x} = \frac{1}{n!} F_1^n(x, y). \end{aligned}$$

Но из предположения (1.4.2) вытекает, что

$$0 \leq F_1(x, y) \leq \int_0^h A^2(z) dz \leq N^2,$$

поэтому имеем

$$0 \leq F_n(x, y) \leq \frac{1}{n!} N^{2n},$$

и, подставляя эту оценку в соотношение (5), получаем

$$|K_{n+2}(x, y)| \leq A(x) B(y) \frac{N^n}{\sqrt{n!}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что определяющий резольвентное ядро H бесконечный ряд (1.3.12), если отбросить в нем первый член, имеет *мажоранту*

$$M(x, y) = |\lambda| A(x) B(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N|\lambda|)^n}{\sqrt{n!}},$$

причем последний ряд *всегда* сходится, поскольку ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

имеет бесконечный радиус сходимости¹⁾. Так как функции $A(x)$ и $B(y)$ могут обращаться в бесконечность на подмножестве интервала $(0, h)$, имеющем меру нуль, этого недостаточно для того, чтобы обеспечить (равномерную и абсолютную) сходимость ряда (1.3.12) всюду; однако этого достаточно для того, чтобы гарантировать (абсолютную) сходимость указанного ряда *почти* всюду. Все же ряд (1.3.12), как это следует из фундаментальной теоремы Лебега, допускает почленное интегрирование, поскольку мажоранта $M(x, y)$, очевидно, является L_2 -функцией.

В подобных случаях мы будем для краткости говорить, что ряд сходится *почти равномерно*²⁾.

¹⁾ В самом деле, положив $(n!)^{-1/2} = a_n$, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = \infty.$$

²⁾ См. также § 2.1.

Между прочим, отсюда следует, что при вычислении интегралов

$$\int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz, \quad \int_y^x H(x, z; \lambda) K(z, y) dz$$

допустимо почленное интегрирование. Таким образом, вспоминая, что операция, при помощи которой получаются последовательные итерированные ядра, подчиняется, как это следует из (1.3.10), *ассоциативному закону*¹⁾, т. е. вспоминая, что

$$K_n(x, y) = \int_y^x K_h(x, z) K_{n-h}(z, y) dz \quad (h = 1, 2, \dots, n-1), \quad (8)$$

мы получаем основные уравнения (4) для резольвентного ядра. Перемены порядка интегрирования, применяющиеся при доказательстве формулы (8) (как и встречающиеся ниже), очевидно, допустимы при наших предположениях (что K , а следовательно, и K_n , а также H принадлежат классу L_2) в силу теоремы Фубини.

При помощи уравнений (4) легко доказать, что заданная формулой (2) функция φ удовлетворяет уравнению (1). Действительно, функция

$$\varphi_0(x) = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (9)$$

обязательно принадлежит классу L_2 , если этому же классу принадлежит функция $f(x)$, поскольку $\varphi_0(x)$ получается прибавлением к $f(x)$ функции вида (1.4.6). Но тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy = \\ = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy - \lambda \int_0^x K(x, y) f(y) dy + \end{aligned}$$

¹⁾ Но, вообще говоря, не подчиняется *коммутативному* закону.

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 \int_0^x K(x, z) dz \int_0^z H(z, y; \lambda) f(y) dy = \\
& = f(x) - \lambda \int_0^x \left[K(x, y) + H(x, y; \lambda) - \right. \\
& \left. - \lambda \int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz \right] f(y) dy = f(x).
\end{aligned}$$

Более того, мы можем показать, что функция (9) представляет собой *единственное* (с точностью до нуль-функций) решение рассматриваемого уравнения в классе L_2 или, иными словами, что любое решение *однородного* интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (10)$$

в пространстве L_2 обязательно является *нуль-функцией*. Для этого мы заметим, что если обозначить через v *норму* функции $\varphi(x)$ по основному интервалу $(0, h)$, так что

$$v^2 = \int_0^h \varphi^2(x) dx,$$

то из уравнения (10) в силу неравенства Буняковского — Шварца следует неравенство

$$\varphi^2(x) \leq |\lambda|^2 \int_0^x K^2(x, y) dy \int_0^x \varphi^2(y) dy \leq |\lambda|^2 A^2(x) v^2,$$

и далее последовательно

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x) & \leq |\lambda|^4 v^2 \int_0^x K^2(x, y) dy \int_0^x A^2(y) dy = \\
& = |\lambda|^4 v^2 A^2(x) \int_0^x A^2(y) dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^2(x) &\leq |\lambda|^6 v^2 \int_0^x K^2(x, y) dy \int_0^x A^2(y) dy \int_0^y A^2(z) dz = \\ &= |\lambda|^6 v^2 A^2(x) \int_0^x A^2(y) dy \int_0^y A^2(z) dz\end{aligned}$$

и т. д. По аналогии с формулой (7) имеем

$$\begin{aligned}\int_0^x A^2(y_1) dy_1 \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_n} A^2(y_n) dy_n = \\ = \frac{1}{n!} \left[\int_0^x A^2(y) dy \right]^n \leq \frac{1}{n!} N^{2n};\end{aligned}\quad (11)$$

следовательно, мы можем написать

$$\varphi^2(x) \leq |\lambda|^2 v^2 A^2(x) \frac{(|\lambda|^2 N^2)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда вытекает, что $\varphi(x) = 0$ в каждой точке, где функция $A(x)$ конечна, поскольку предел правой части при $n \rightarrow \infty$, очевидно, равен нулю¹⁾.

Между прочим, из доказанной теоремы единственности следует, что уравнение (4) (первое или второе) *вполне характеризует* резольвентные ядра в пространстве L_2 . Ибо, если некоторая L_2 -функция $H(x, y; \lambda)$ удовлетворяет одному из этих уравнений, то она обязательно является резольвентным ядром, соответствующим ядру $K(x, y)$.

1.6. Уравнение Вольтерра первого рода

Как уже отмечалось, связь между интегральными уравнениями Вольтерра первого и второго рода проще, чем аналогичная связь между уравнениями Фредгольма.

¹⁾ Таким образом, исключительное множество, на котором функция $\varphi(x)$ может быть отличной от нуля, обязательно является подмножеством множества, на котором $A(x) = \infty$. Более того, если уравнение (10) удовлетворяется *всюду* на интервале $(0, h)$, то из того факта, что $\varphi(x)$ есть нуль-функция, следует, что $\varphi(x)$ должна быть *тождественным нулем*.

Так, если в уравнении первого рода

$$\int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq h) \quad (1)$$

«диагональ» $K(x, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке основного интервала $(0, h)$ и если производные

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x), \quad \frac{\partial K}{\partial x} \equiv K'_x(x, y), \quad \frac{\partial K}{\partial y} \equiv K'_y(x, y) \quad (2)$$

существуют и непрерывны¹⁾, то это уравнение можно привести к одному из уравнений второго рода двумя способами.

Первый и более простой способ состоит в дифференцировании обеих частей уравнения (1) по x . В результате мы получаем

$$K(x, x) \varphi(x) + \int_0^x K'_x(x, y) \varphi(y) dy = f'(x), \quad (3)$$

т. е.

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K'_x(x, y)}{K(x, x)} \varphi(y) dy = \frac{f'(x)}{K(x, x)}, \quad (4)$$

и приведение закончено.

Второй способ основан на интегрировании по частям; положив

$$\int_0^x \varphi(y) dy = \Phi(x), \quad (5)$$

получаем уравнение

$$f(x) = [K(x, y) \Phi(y)]_{y=0}^{y=x} - \int_0^x K'_y(x, y) \Phi(y) dy, \quad (6)$$

т. е.

$$\Phi(x) - \int_0^x \frac{K'_y(x, y)}{K(x, x)} \Phi(y) dy = \frac{f(x)}{K(x, x)}. \quad (7)$$

¹⁾ Мы делаем эти ограничения только ради простоты.

На первый взгляд кажется, что для применения второго способа не требуется дифференцируемости функции $f(x)$. Однако для того, чтобы найти функцию $\Phi(x)$, мы должны продифференцировать функцию $\Phi(x)$, определенную при помощи формулы

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{K(x, x)} - \int_0^x H^*(x, y; 1) \frac{f(y)}{K(y, y)} dy, \quad (8)$$

[где $H^*(x, y; \lambda)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K'_y(x, y)/K(x, x)$], а для этого $f(x)$ должна быть дифференцируемой.

Самым существенным из предыдущих условий является условие, относящееся к «диагонали» $K(x, x)$; ибо если $K(x, x)$ обращается в нуль в некоторой точке основного интервала $(0, h)$, например в точке $x=0$, то уравнения (3) и (6) (которые всегда могут быть составлены) обладают особыми свойствами, совершенно отличными от свойств уравнений второго рода. Такие уравнения названы Пикаром (который в действительности рассматривал уравнения типа уравнений Фредгольма) уравнениями *третьего рода*¹⁾.

С другой стороны, как мы увидим в § 1.8, обращение в нуль функции $K(x, x)$ приводит к осложнениям, подобным тем, которые вызываются обращением в нуль первого коэффициента в обыкновенном линейном дифференциальном уравнении. Именно с такой точки зрения этот особый случай был изучен Лалеско [28] и другими авторами.

1.7. Пример

В качестве примера уравнения Вольтерра второго рода рассмотрим уравнение

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y} \Phi(y) dy = f(x); \quad (1)$$

¹⁾ Однако если $K(x, x)$ обращается в нуль *тождественно*, то иногда оказывается возможным получить уравнение второго рода, повторяя предыдущие преобразования.

это тот случай, когда

$$K(x, y) = e^{x-y} = e^x e^{-y}. \quad (2)$$

При помощи простых вычислений получаем

$$K_2(x, y) = \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} dz = e^{x-y} \int_y^x dz = e^{x-y} (x - y),$$

$$\begin{aligned} K_3(x, y) &= \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} (z - y) dz = \\ &= e^{x-y} \int_y^x (z - y) dz = e^{x-y} \frac{(x-y)^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4(x, y) &= \frac{1}{2} \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} (z - y)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} e^{x-y} \int_y^x (z - y)^2 dz = e^{x-y} \frac{(x-y)^3}{3!}, \end{aligned}$$

или в общем виде

$$K_{n+1}(x, y) = e^{x-y} \frac{(x-y)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, согласно (1.3.12), имеем

$$\begin{aligned} H(x, y; \lambda) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) = \\ &= - e^{x-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-y)]^n}{n!} = - e^{(1+\lambda)(x-y)}, \end{aligned}$$

а согласно (1.3.11), получаем простое решение:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(1+\lambda)(x-y)} f(y) dy. \quad (3)$$

Причина такой исключительной простоты результата кроется в особой природе ядра (2), которое зависит только от разности $x - y$ и в то же время является

ядром вида

$$K(x, y) = \frac{A(x)}{A(y)}. \quad (4)$$

Ядра вида $K(x, y) = k(x - y)$ будут рассмотрены позже (§ 1.9). Что касается ядер вида (4), то легко видеть, что в этом случае уравнение Вольтерра второго (или первого) рода может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое непосредственно интегрируется. Действительно, положив

$$\frac{\varphi(x)}{A(x)} = \varphi_1(x), \quad \frac{f(x)}{A(x)} = f_1(x),$$

мы приведем уравнение к виду

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_0^x \varphi_1(y) dy = f_1(x),$$

или

$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - \lambda\varphi_2(x) = f_1(x), \quad \text{где } \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(y) dy.$$

Заметив, что $\varphi_2(0) = 0$, получим

$$\varphi_2(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f_1(y) dy$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{d\varphi_2(x)}{dx} = f_1(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f_1(y) dy, \\ \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} K(x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Конечно, эта формула может быть также получена изложенным выше методом последовательных приближений.

1.8. Интегральные уравнения Вольтерра и линейные дифференциальные уравнения

Пример, приведенный в предыдущем параграфе, указывает на фундаментальную связь между интегральными

уравнениями Вольтерра и обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Действительно, решение любого дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) u = F(x) \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами при начальных условиях

$$u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (2)$$

может быть сведено к решению некоторого интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (3)$$

Это делается следующим образом. Полагаем

$$D^n u \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = \varphi(x), \quad (4)$$

и далее последовательно

$$D^{-1} \varphi = \int_0^x \varphi(y) dy,$$

$$D^{-2} \varphi = D^{-1} (D^{-1} \varphi) = \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy,$$

.....

$$D^{-n} \varphi = D^{-1} (D^{-n+1} \varphi) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \varphi(y) dy.$$

Принимая во внимание условия (2), замечаем, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} &= c_{n-1} + D^{-1} \varphi, \\ \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} &= c_{n-1} x + c_{n-2} + D^{-2} \varphi, \\ &\dots \dots \dots \\ u &= c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 + D^{-n} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Возвращаясь к дифференциальному уравнению (1), мы видим, что его можно записать в виде (3), если положить

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^n a_h(x) \frac{(x-y)^{h-1}}{(h-1)!} \quad (6)$$

и

$$f(x) = F(x) - c_{n-1}a_1(x) - (c_{n-1}x + c_{n-2})a_2(x) - \dots - \\ - \left(c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1x + c_0 \right) a_n(x). \quad (7)$$

Обратно, решая интегральное уравнение (3) с K и f , определенными по формулам (6) и (7), и подставляя выражение, полученное для $\varphi(x)$, в последнее из уравнений (5), мы получим (единственное) решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Если коэффициент при старшей производной в уравнении (1) не единица, а, скажем, $a_0(x)$, то уравнение (3) имеет вид

$$a_0(x) \varphi(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (8)$$

где K и f соответственно задаются все теми же формулами (6) и (7). Если на рассматриваемом интервале $a_0(x) \neq 0$, то все остается по-прежнему; однако если $a_0(x)$ обращается в нуль в некоторой точке, то мы видим, что уравнение вида (8) (которое мы уже встречали в предыдущем параграфе) эквивалентно *особому* линейному дифференциальному уравнению по крайней мере, когда ядро $K(x, y)$ представляет собой многочлен относительно y .

Существуют и другие методы приведения линейного обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра. Из них мы рассмотрим *метод Фубини*¹⁾, основанный на формальном использовании метода вариации постоянных Лагранжа.

¹⁾ Мне приятно отметить, что этот метод принадлежит моему забываемому другу и коллеге Г. Фубини (1879—1943), который, как мне представляется, первый использовал этот подход в 1937 г. для быстрого получения классических асимптотических разложений функций Бесселя. Фубини использовал, однако, частный случай метода ($A \equiv B \equiv 0$), который несущественно отличается от метода

Для простоты мы применим этот метод к однородному уравнению второго порядка, которое запишем в виде

$$u'' + p_1(x) u' + p_2(x) u = A(x) u'' + B(x) u' + C(x) u, \quad (9)$$

расщепляя каждый коэффициент на два слагаемых. Это, конечно, может быть проделано бесконечным множеством способов, из которых мы выберем тот, который даст нам возможность наиболее простым образом явно определить общее решение уравнения

$$u'' + p_1(x) u' + p_2(x) u = 0. \quad (10)$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы старший коэффициент $1 - A(x)$ в уравнении (9) не обращался в нуль на рассматриваемом интервале.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (10), т. е. два решения, вронскиан которых

$$W(x) = \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_1'(x) & F_2'(x) \end{vmatrix} \quad (11)$$

не обращается в нуль. Мы будем искать решение уравнения (9) в виде

$$u(x) = C_1(x) F_1(x) + C_2(x) F_2(x), \quad (12)$$

где, согласно методу вариации постоянных, функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны быть выбраны так, чтобы соотношение

$$C_1'(x) F_1(x) + C_2'(x) F_2(x) = 0 \quad (13)$$

выполнялось тождественно. Подставляя выражение (12) в уравнение (9) и используя условие (13), мы получаем

$$C_1' F_1' + C_2' F_2' = \frac{AF_1'' + BF_1' + CF_1}{1-A} C_1 + \frac{AF_2'' + BF_2' + CF_2}{1-A} C_2. \quad (14)$$

Разрешая систему, состоящую из (13) и (14), относительно C_1' и C_2' , находим

$$C_1' = -(C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2) F_2, \quad C_2' = (C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2) F_1, \quad (15)$$

Лиувилля — Стеклова, так часто используемого Сеге в его книге [41], и Лангером (с 1934 г.). В общем виде этот метод впервые появился, по-видимому, в моих «Дифференциальных уравнениях» [47].

где

$$\Phi_h(x) = \frac{AF_h'' + BF_h' + CF_h}{(1-A)W} \quad (h = 1, 2). \quad (16)$$

Система дифференциальных уравнений (15) с неизвестными функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= \gamma_1 - \int_{x_0}^x [C_1(\xi) \Phi_1(\xi) + C_2(\xi) \Phi_2(\xi)] F_2(\xi) d\xi, \\ C_2(x) &= \gamma_2 + \int_{x_0}^x [C_1(\xi) \Phi_1(\xi) + C_2(\xi) \Phi_2(\xi)] F_1(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\gamma_1 = C_1(x_0), \quad \gamma_2 = C_2(x_0)$$

— постоянные, которые могут быть определены из условия, что $u(x)$ и $u'(x)$ принимают заданные значения в определенной точке $x = x_0$ ¹⁾. Положив

$$C_1(x) \Phi_1(x) + C_2(x) \Phi_2(x) = \psi(x), \quad (18)$$

затем умножив первое из уравнений (17) на $\Phi_1(x)$, а второе — на $\Phi_2(x)$ и сложив полученные результаты, мы придем к уравнению

$$\psi(x) - \int_{x_0}^x K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = f(x), \quad (19)$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix}, \quad f(x) = \gamma_1 \Phi_1(x) + \gamma_2 \Phi_2(x). \quad (20)$$

Чтобы избавиться от присутствия в интегральном уравнении постоянных γ_1 и γ_2 , положим

$$\psi(x) = \gamma_1 \psi_1(x) + \gamma_2 \psi_2(x) \quad (21)$$

¹⁾ Уравнения для определения γ_1 и γ_2 имеют вид

$$\gamma_1 F_1(x_0) + \gamma_2 F_2(x_0) = u(x_0), \quad \gamma_1 F_1'(x_0) + \gamma_2 F_2'(x_0) = u'(x_0).$$

и получим два простых интегральных уравнения:

$$\psi_h(x) - \int_{x_0}^x K(x, \xi) \psi_h(\xi) d\xi = \Phi_h(x) \quad (h = 1, 2). \quad (22)$$

Наконец, легко показать, что искомое решение уравнения (9) выражается через функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ при помощи формулы

$$u(x) = \gamma_1 U_1(x) + \gamma_2 U_2(x), \quad (23)$$

где

$$U_h(x) = F_h(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ F_1(x) & F_2(x) \end{vmatrix} \psi_h(\xi) d\xi \quad (h = 1, 2). \quad (24)$$

Так как при слабых ограничениях § 1.4 интегральное уравнение Вольтерра второго рода может быть решено при помощи абсолютно и *почти равномерно*¹⁾ сходящегося ряда, метод Фубини «*всегда*» даст нам возможность получить фундаментальную систему решений уравнения (9) независимо от порядка величин коэффициентов A , B , C в правой части. В частности, если эти коэффициенты «малы», метод оказывается особенно полезным и может быть использован для получения различных асимптотических представлений решений уравнения вида (9).

Например, если уравнение содержит некоторый параметр λ и, кроме того,

$$A = O(\lambda^{-r}), \quad B = O(\lambda^{-r}), \quad C = O(\lambda^{-r}) \quad (\lambda \rightarrow \infty, r > 0) \quad (25)$$

равномерно по x , тогда как остальные коэффициенты p и q (а следовательно, и F_1 , F_2) остаются ограниченными, мы получим

$$\Phi_h = O(\lambda^{-r}), \quad K(x, \xi) = O(\lambda^{-r}), \quad f(x) = O(\lambda^{-r}).$$

Из уравнений (22) следует, что

$$\psi_h = O(\lambda^{-r}).$$

¹⁾ Это означает, что ряд сходится *равномерно*, пока ядро принадлежит классу L_2^* , и что он обладает свойствами, указанными в § 1.5, когда функция $A(x)$ не ограничена.

Таким образом, в качестве следствия соотношения (24) мы получаем простое асимптотическое представление

$$U_h(x) = F_h(x) + O(\lambda^{-r}), \quad (26)$$

или, «более точно»,

$$U_h(x) = F_h(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ F_1(x) & F_2(x) \end{vmatrix} \Phi_h(\xi) d\xi + O(\lambda^{-2r}). \quad (27)$$

1.9. Уравнения типа свертки

В важном частном случае линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами первый из указанных в предыдущем параграфе методов приводит нас, как видно из формулы (1.8.6), к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, ядро которого является многочленом относительно $x - y$, т. е. представляет собой частный случай функции вида

$$K(x, y) = k(x - y), \quad (1)$$

где $k(t)$ — некоторая функция одного переменного. Уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x - y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (2)$$

а также аналогичные уравнения первого рода

$$\int_0^x k(x - y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (3)$$

представляют собой важный специальный класс интегральных уравнений Вольтерра, которые были названы Вольтерра *уравнениями с замкнутым циклом*, поскольку оператор

$$V_x[\varphi(y)] = \int_{-\infty}^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

преобразует всякую периодическую функцию $\varphi(y)$ с произвольным периодом T в другую периодическую функцию

с тем же периодом T тогда и только тогда, когда ядро $K(x, y)$ имеет вид (1)¹⁾.

В настоящее время они обычно называются *уравнениями типа свертки*, так как операция

$$\varphi * \psi \equiv \int_0^x \varphi(x-y) \psi(y) dy \quad (4)$$

обычно именуется *сверткой* (нем. Faltung, англ. convolution) двух функций φ и ψ .

Свертка представляет собой частный случай композиции Вольтерра первого рода (ср. § 1.4):

$$\Phi^* \Psi \equiv \int_y^x \Phi(x, z) \Psi(z, y) dz, \quad (5)$$

когда обе функции Φ, Ψ имеют вид (1). В самом деле, если

$$\Phi(x, y) = \varphi(x-y), \quad \Psi(x, y) = \psi(x-y)$$

и если мы положим $z = y + t$, то получим

$$\Phi^* \Psi = \int_0^{x-y} \varphi(x-y-t) \psi(t) dt,$$

т. е.

$$\Phi^* \Psi = \chi(x-y), \quad \text{где} \quad \chi(u) = \int_0^u \varphi(u-t) \psi(t) dt = \varphi * \psi. \quad (6)$$

Как и композиция, свертка всегда *ассоциативна*:

$$\varphi * (\psi * \chi) = (\varphi * \psi) * \chi, \quad (7)$$

но она также и *коммутативна* в отличие от композиции, которая, вообще говоря, *не* коммутативна. В самом деле, положив $x-y=z$, будем иметь

$$\varphi * \psi = \int_0^x \varphi(z) \psi(x-z) dz = \psi * \varphi. \quad (8)$$

¹⁾ См. Tricomi F., Sul «principio del ciclo chiuso» del Volterra, Atti R. Accad. Sci. Torino, 76 (1940—1941), 74—82.

Заметим, наконец, что часто удобно пользоваться следующими обозначениями:

$$\varphi * \varphi = \varphi^{*2}, \quad \varphi * \varphi^{*2} = \varphi^{*3}, \dots \quad (9)$$

Используя символ свертки, можно записать предыдущие уравнения (2) и (3) соответственно в виде

$$\varphi(x) - \lambda k(x) * \varphi(x) = f(x), \quad (2')$$

$$k(x) * \varphi(x) = f(x). \quad (3')$$

Основным средством изучения подобных уравнений служит преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}_x[F(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-xt} F(t) dt,$$

поскольку этот оператор при некоторых ограничениях преобразует свертку в обыкновенное произведение

$$\mathcal{L}_x[F_1(t) * F_2(t)] = \mathcal{L}_x[F_1(t)] \mathcal{L}_x[F_2(t)]. \quad (10)$$

Например, применяя преобразование Лапласа к уравнению (3'), мы получаем

$$\mathcal{L}_x[\varphi(t)] = \frac{\mathcal{L}_x[f(t)]}{\mathcal{L}_x[k(t)]}. \quad (11)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к обращению преобразования Лапласа, т. е. к определению $F(t)$, если задано $\mathcal{L}[F(t)]$. Однако мы не будем подробно излагать этот метод, ибо он, по существу, принадлежит теории преобразования Лапласа¹⁾.

Оставляя в стороне этот специальный прием исследования уравнений типа свертки, заметим, что все ядра, получающиеся в результате итерации ядра (1), а также резольвентное ядро имеют тот же вид (1). В самом деле, используя обозначения (9), имеем

$$K_n(x, y) = k_n(x - y), \quad \text{где } k_n(t) = k^{*n}(t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

¹⁾ Относительно преобразования Лапласа см., например, Дёч [15], Уиддер [51], Титчмарш [44].

и

$$H(x, y; \lambda) = h(x - y, \lambda), \quad \text{где} \quad h(t, \lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} k^{*n}(t) \lambda^{n-1}. \quad (13)$$

Г. К. Эванс¹⁾ рассмотрел особенно интересный частный случай

$$k(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (14)$$

где m — положительное целое число, т. е. случай, в котором $K(x, y) = 1^{*m}$. Используя формулу

$$\frac{t^m}{m!} * \frac{t^n}{n!} = \frac{t^{m+n+1}}{(m+n+1)!},$$

являющуюся непосредственным следствием того факта, что

$$\mathcal{L}_x[t^n] = \frac{n!}{x^{n+1}},$$

мы получаем

$$k^{*2}(t) = \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad k^{*3}(t) = \frac{t^{3m-1}}{(3m-1)!}, \dots,$$

и, следовательно,

$$h(t, \lambda) = -\lambda^{(1-m)/m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\lambda^{1/m})^{nm-1}}{(nm-1)!}. \quad (15)$$

Этот результат замечателен тем, что сумма бесконечного ряда

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nm-1}}{(nm-1)!} \quad (16)$$

может быть выражена в элементарных функциях.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную аналитическую функцию, регулярную в окрестности начала координат,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

¹⁾ См. Дейвис [14], стр. 18.

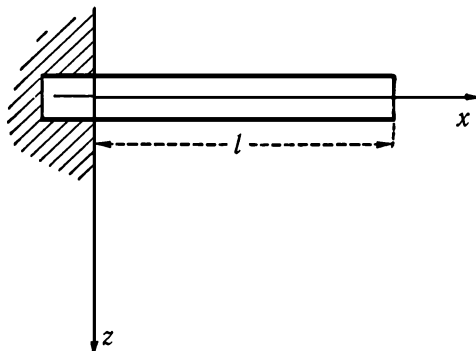
$$\begin{aligned} f_{m,1}(z) &= a_0 + a_m z^m + a_{2m} z^{2m} + \dots, \\ f_{m,2}(z) &= a_1 z + a_{m+1} z^{m+1} + a_{2m+1} z^{2m+1} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{m,m}(z) &= a_{m-1} z^{m-1} + a_{2m-1} z^{2m-1} + a_{3m-1} z^{3m-1} + \dots. \end{aligned}$$
$$\left. \begin{aligned} f(\varepsilon_1 z) &= f_{m,1}(z) + \varepsilon_1 f_{m,2}(z) + \\ &\quad + \varepsilon_1^2 f_{m,3}(z) + \dots + \varepsilon_1^{m-1} f_{m,m}(z), \\ f(\varepsilon_2 z) &= f_{m,1}(z) + \varepsilon_2 f_{m,2}(z) + \\ &\quad + \varepsilon_2^2 f_{m,3}(z) + \dots + \varepsilon_2^{m-1} f_{m,m}(z), \\ &\dots\dots\dots \\ f(\varepsilon_m z) &= f_{m,1}(z) + \varepsilon_m f_{m,2}(z) + \\ &\quad + \varepsilon_m^2 f_{m,3}(z) + \dots + \varepsilon_m^{m-1} f_{m,m}(z). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$
$$\eta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots, m),$$
$$f_{m,r}(z) = \eta_{r1} f(\varepsilon_1 z) + \eta_{r2} f(\varepsilon_2 z) + \dots \\ \dots + \eta_{rm} f(\varepsilon_m z) \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

Применив этот результат к функциям $F_m(z) = f_{m,m}(z)$, $f(z) = e^z$, найдем

$$\left. \begin{aligned} F_1(z) &= e^z, & F_2(z) &= \operatorname{sh} z, \\ F_3(z) &= \frac{1}{3} e^z - \frac{1}{3} e^{-z/2} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} z\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} z\right) \right], \\ F_4(z) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} z - \sin z), \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

1.10. Поперечные колебания балки

Имеющая большое значение в технике задача о поперечных колебаниях балки может быть в весьма общих предположениях изучена при помощи метода, указанного в § 1.1, т. е. путем использования функции влияния $G(x, y)$.



Р и с. 3.

Предположим, что в состоянии покоя ось балки совпадает с интервалом $(0, l)$ оси x и что параллельное оси z отклонение точки x в момент t есть $z(x, t)$. Тогда непосредственно из формулы (1.1.1) и принципа Даламбера мы получаем *интегро-дифференциальное уравнение*

$$z(x, t) = \int_0^l G(x, y) \left[p(y) - \mu(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] dy \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1)$$

где $p(y)dy$ — нагрузка, действующая на участок $(y, y + dy)$ балки в направлении Oz , и $\mu(y)dy$ — масса этого участка.

В частности, в важном случае *гармонических колебаний*

$$z(x, t) = Z(x) e^{\omega t i} \quad (2)$$

ненагруженной балки [$p(y) \equiv 0$] для $l = 1$ получаем

$$Z(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x, y) \mu(y) Z(y) dy = 0, \quad (3)$$

т. е. то же самое однородное интегральное уравнение, что и в § 1.1.

Тот факт, что предыдущее уравнение совпадает с полученным в § 1.1, весьма интересен. Например, он указывает на возможность экспериментального определения критических скоростей вращающегося вала при помощи экспериментально более простого гармонического анализа его поперечных колебаний.

Кроме того, уравнение (3) показывает, что рассматриваемая задача о колебаниях, как и задача из § 1.1, принадлежит, по существу, к теории интегральных уравнений Фредгольма, и позже (§ 3.14) мы снова рассмотрим уравнение (3) с этой точки зрения. Однако в некоторых случаях оказывается возможным получение вполне точных результатов даже в рамках более элементарной теории интегральных уравнений Вольтерра.

Это имеет место, например, в случае *однородной* балки:

$$\mu(x) = \mu = \text{const},$$

закрепленной на конце $x=0$ и свободной на конце $x=l$. Ее поперечные колебания описываются дифференциальным уравнением в частных производных ¹⁾

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\mu}{j} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

(где $j = EI$ — коэффициент жесткости балки при изгибе) с краевыми условиями

$$z(0, t) = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{x=l} = \left[\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right]_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Используя представление (2), мы получаем для поперечных гармонических колебаний с частотой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} - k^4 Z = 0, \quad \text{где} \quad k^4 = 4\pi^2 \nu^2 \frac{\mu}{j}, \quad (7)$$

¹⁾ См., например, Морс [31], стр. 114.

и соответствующие краевые условия

$$Z(0) = Z'(0) = 0, \quad (8')$$

$$Z''(l) = Z'''(l) = 0. \quad (8'')$$

Пользуясь методом, указанным в первой части § 1.8, и временно опуская условия (8''), можно преобразовать уравнение (7) с краевыми условиями (8') в интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Если при этом мы положим

$$Z''(0) = c_2, \quad Z'''(0) = c_3,$$

то получим уравнение

$$\varphi(x) - k^4 \int_0^x \frac{(x-y)^3}{3!} \varphi(y) dy = k^4 \left(c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} \right). \quad (9)$$

Таким образом, мы приходим к уравнению со специальным ядром вида (1.9.14) (при $m=4$) и, следовательно, из соотношений (1.9.15) и (1.9.16) получаем, что соответствующее резольвентное ядро имеет вид

$$H(x, y; k^4) = -k^3 F_4[k(x-y)],$$

где

$$F_4(z) \equiv f_{4,4}(z) = \frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \dots = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} z - \sin z);$$

поэтому

$$\varphi(x) = k^4 \left(c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} \right) + k^5 F_4(kx) * \left(c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} \right).$$

Однако, используя обозначения § 1.9, находим

$$\begin{aligned} F_4(kx) * \frac{x^2}{2!} &= \left(k^3 \frac{x^3}{3!} + k^7 \frac{x^7}{7!} + \dots \right) * \frac{x^2}{2!} = \\ &= k^3 \frac{x^6}{6!} + k^7 \frac{x^{10}}{10!} + \dots = k^{-3} \left[\frac{(kx)^6}{6!} + \frac{(kx)^{10}}{10!} + \dots \right] = \\ &= k^{-3} \left[f_{4,3}(kx) - \frac{(kx)^2}{2!} \right], \\ F_4(kx) * \frac{x^3}{3!} &= \left(k^3 \frac{x^3}{3!} + k^7 \frac{x^7}{7!} + \dots \right) * \frac{x^3}{3!} = \\ &= k^3 \frac{x^7}{7!} + k^7 \frac{x^{11}}{11!} + \dots = k^{-4} \left[\frac{(kx)^7}{7!} + \frac{(kx)^{11}}{11!} \right] + \dots = \\ &= k^{-4} \left[f_{4,4}(kx) - \frac{(kx)^3}{3!} \right], \end{aligned}$$

так что

$$\varphi(x) = c_2 k^2 f_{4,3}(kx) + c_3 k f_{4,4}(kx).$$

Более того, поскольку из системы (1.9.17) при $m = 4$ следует, что

$$f_{4,3}(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z - \cos z), \quad f_{4,4}(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z - \sin z),$$

мы получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} c_2 k^2 [\operatorname{ch}(kx) - \cos(kx)] + \frac{1}{2} c_3 k [\operatorname{sh}(kx) - \sin(kx)]. \quad (10)$$

Теперь мы должны вспомнить не учитывавшиеся ранее условия (8'') для $x = l$. Поскольку

$$Z'''(x) = c_3 + D^{-1}\varphi(x), \quad Z''(x) = c_2 + c_3 x + D^{-2}\varphi(x),$$

или, в явном виде,

$$Z'''(x) = \frac{1}{2} c_2 k [\operatorname{sh}(kx) - \sin(kx)] + \frac{1}{2} c_3 [\operatorname{ch}(kx) + \cos(kx)],$$

$$Z''(x) = \frac{1}{2} c_2 [\operatorname{ch}(kx) + \cos(kx)] + \frac{1}{2} c_3 k^{-1} [\operatorname{sh}(kx) + \sin(kx)],$$

мы получаем два линейных уравнения с неизвестными c_2, c_3 :

$$\left. \begin{aligned} k [\operatorname{sh}(kl) - \sin(kl)] c_2 + [\operatorname{ch}(kl) + \cos(kl)] c_3 &= 0, \\ [\operatorname{ch}(kl) + \cos(kl)] c_2 + k^{-1} [\operatorname{sh}(kl) + \sin(kl)] c_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Таким образом, если определитель этой системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение $c_2 = c_3 = 0$, и единственным решением данного уравнения является тривиальное решение

$$\varphi(x) = Z(x) = 0.$$

Если же определитель равен нулю, то наша задача имеет также и нетривиальные решения. Отсюда вытекает, что возможны только те гармонические колебания нашей балки, которые соответствуют положительным корням трансцендентного уравнения

$$\operatorname{sh}^2(kl) - \sin^2(kl) = [\operatorname{ch}(kl) + \cos(kl)]^2,$$

или, после упрощения,

$$\operatorname{ch} \xi \cos \xi + 1 = 0, \quad (12)$$

где

$$\xi = kl. \quad (13)$$

Это трансцендентное уравнение¹⁾ можно решить графически (рис. 4), найдя точки пересечения двух кривых

$$\eta = \cos \xi, \quad \eta = -1/\operatorname{ch} \xi.$$

Другой путь состоит в рассмотрении гудерманиана

$$\operatorname{gd} \xi = 2 \operatorname{arctg} e^{\xi} - \frac{1}{2} \pi$$

(0, $\pi/2$)

(для его значений существуют хорошие таблицы), при помощи которого уравнение (12) приводится к виду

$$\operatorname{gd} \xi = (2n - 1) \pi \pm \xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (14)$$

третий способ решения дает разложение

$$\begin{aligned} \xi_n &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi + \delta_n - \delta_n^2 + \frac{17}{12} \delta_n^3 - \dots, \\ \delta_n &= (-1)^{n-1} 2e^{-(n-1/2)\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (15)$$

которое в явном виде определяет последовательные положительные корни ξ_1, ξ_2, \dots уравнения (12).

Таким образом, мы находим

$$\xi_1 = 1,875106, \quad \xi_2 = 4,6941, \dots$$

Из формулы (13) и второго равенства (7) получаются следующие выражения для собственных частот нашей балки:

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{j}{\mu}} \frac{\xi_n^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

В противоположность тому, что имеет место в случае колеблющейся *струны*, эти частоты *не* являются последо-

¹⁾ Это уравнение рассмотрено также в хорошо известных таблицах функций Янке и Эмде (Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, изд. 3-е, М., 1959, стр. 48, правда, с некоторыми ошибками).

вательными кратными первой из них¹⁾ и обратно пропорциональны квадрату l , а не l .

Несмотря на полноту предыдущего результата, его ценность с точки зрения теории интегральных уравнений невелика, поскольку основная формула (10) для $\varphi(x)$ [или эквивалентная формула для $Z(x)$] может быть также получена прямо (и притом быстрее) из линейного уравнения с постоянными коэффициентами (7).

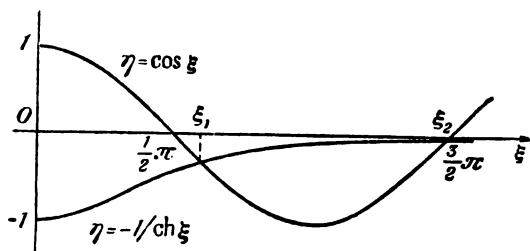


Рис. 4.

С точки зрения теории интегральных уравнений более интересно то, что из самого интегрального уравнения (9) мы можем получить хорошее приближение для первого собственного значения

$$k_1^4 = \left(\frac{\xi_1}{l} \right)^4 = \frac{12,362}{l^4},$$

поскольку этот прием можно использовать даже тогда, когда интегральное уравнение не решается в явном виде.

Это приближение получается следующим образом. Рассмотрим в качестве первого приближения неизвестной функции $\varphi(x)$ любой многочлен первой степени

$$\varphi_0(x) = \alpha + \beta x,$$

и из интегрального уравнения (9) найдем второе приближение

$$\varphi_1(x) = \lambda \left(c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} + \alpha \frac{x^4}{4!} + \beta \frac{x^5}{5!} \right).$$

¹⁾ Однако, если n велико, ξ_n асимптотически равно всем нечетным кратным $n\pi/2$ числа $\pi/2$ (см. рис. 4), ν_n асимптотически пропорционально n^2 .

Затем потребуем, чтобы эти две функции удовлетворяли краевым условиям

$$c_3 + D^{-1}\varphi(x) = 0, \quad c_2 + c_3x + D^{-2}\varphi(x) = 0 \quad (x = l),$$

которые, по существу, относятся к *точному* решению $\varphi(x)$, и получим четыре однородных линейных уравнения с четырьмя неизвестными c_2, c_3, α, β :

$$\left. \begin{aligned} c_3 + \alpha L_1 + \beta L_2 &= 0, \\ c_2 + c_3 l + \alpha L_2 + \beta L_3 &= 0, \\ c_3 + \lambda(c_2 L_3 + c_3 L_4 + \alpha L_5 + \beta L_6) &= 0, \\ c_2 + c_3 l + \lambda(c_2 L_4 + c_3 L_5 + \alpha L_6 + \beta L_7) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$L_n = \frac{l^n}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 7).$$

Эти уравнения имеют нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L_1 & L_2 \\ 1 & L_1 & L_2 & L_3 \\ L_3 & L_4 + \frac{1}{\lambda} & L_5 & L_6 \\ L_4 + \frac{1}{\lambda} & L_5 + \frac{L_1}{\lambda} & L_6 & L_7 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Это и есть уравнение для приближенного вычисления первого собственного значения λ_1 . Положив $l = 1$, раскрыв определитель и упростив полученное выражение, мы получим уравнение второго порядка:

$$7\left(\frac{7!}{\lambda}\right)^2 - 408\left(\frac{7!}{\lambda}\right) + 240 = 0,$$

большой корень которого ¹⁾ равен 403,84. Следовательно,

$$\lambda_1 \approx 12,480,$$

вместо точного значения $\lambda_1 = 12,362$ — достаточно хорошее приближение!

¹⁾ Второй корень может быть использован для получения (грубого) приближения для λ_2 .

1.11. Приложение к функциям Бесселя

Мы уже отмечали, что метод Фубини, изложенный во второй части § 1.8, был создан с целью получения более простым способом классических разложений функций Бесселя для больших значений аргумента. Однако этот же метод, и даже с большим успехом, может быть использован и для решения более трудной задачи об асимптотическом представлении функций Бесселя при значениях аргумента x , почти равных порядку ν рассматриваемой функции¹⁾, т. е. для изучения поведения решений уравнения Бесселя при $\nu \rightarrow \infty$ в окрестности точки перехода $x = \nu$.

В общем случае при изучении асимптотического поведения решений основного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (p(x) > 0) \quad (1)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ нули функции $r(x)$ называются *точками перехода*, поскольку, в зависимости от того, будет ли $r(x) > 0$ или $r(x) < 0$, интеграл уравнения (1) либо колеблется, либо изменяется монотонно при больших значениях λ .

Если $x = x_0$ — простой нуль функции $r(x)$ и если положить

$$\xi = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\alpha^2(x) p(x)}, \quad y = \alpha(x) z, \quad (2)$$

где α — положительная функция, подлежащая определению в дальнейшем, то при незначительных ограничениях на коэффициенты наше уравнение преобразуется к виду²⁾

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + (\lambda \alpha^4 p q \xi - Q) z = 0,$$

где $q = q(\xi)$ — положительная функция в окрестности точки перехода $\xi = 0$ и

$$Q(\xi) = \alpha^3 p (p \alpha'' + p' \alpha' + q \alpha).$$

¹⁾ См. Tricomi F. G., Sulle funzioni di Bessel di ordine e argomento pressochè equali, *Atti Accad. Sci. Torino*, 83 (1947), 3—20.

²⁾ См. Tricomi F. G., Equazioni differenziali con punti di transizione («turning points»), *Rend. Accad. Lincei Roma* (8), 17 (1954), II, 137—141.

Следовательно, если мы положим

$$\alpha = (\rho q)^{-1/4}$$

(это возможно в силу того, что $\rho q > 0$), то получим каноническое уравнение для изучения точек перехода

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + [\lambda \xi - Q(\xi)] z = 0. \quad (3)$$

Это каноническое уравнение особенно удобно для применения метода Фубини (§ 1.8), поскольку после новой замены независимого переменного

$$\xi = (3\lambda)^{-1/3} t, \quad (4)$$

оно может быть переписано в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3} t z = \lambda^{-2/3} Q^*(t) z, \quad (5)$$

где

$$Q^*(t) = 3^{2/3} Q(3^{1/3} \lambda^{-1/3} t). \quad (6)$$

В самом деле, правая часть уравнения (5) имеет порядок $O(\lambda^{-2/3})$ при достаточно широком предположении, что функция $Q(\xi)$ ограничена в окрестности точки $\xi = 0$, и, приравнявая левую часть нулю, мы получаем классическое уравнение для функции Эйри¹⁾

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{t}{3}} \left\{ J_{-1/3} \left[2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right] + J_{1/3} \left[2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right] \right\}, \quad (7)$$

и аналогичной ей функции

$$A_2(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{t} \left\{ J_{-1/3} \left[2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right] - J_{1/3} \left[2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right] \right\}. \quad (7')$$

Следовательно, используя только (1.8.26), мы получаем простое асимптотическое представление:

$$Z_h = A_h(t) + O(\lambda^{-2/3}), \quad (8)$$

¹⁾ Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, М., 1949, § 6.4 и 10.22.

т. е.

$$Z_h(\xi) = A_h[(3\lambda)^{1/3}\xi] + O(\lambda^{-2/3}) \quad (h = 1, 2), \quad (9)$$

для двух линейно независимых решений Z_1 и Z_2 канонического уравнения (3). Для многих целей это часто оказывается достаточным.

Эти формулы вскрывают характер «точек перехода».

В самом деле, в зависимости от того, будет ли $\xi > 0$ или $\xi < 0$, аргумент $t = (3\lambda)^{1/3}\xi$ функции $A_h(t)$ стремится соответственно к $+\infty$ или к $-\infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и асимптотическое поведение функции $A_h(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ существенно отличается от поведения ее при $t \rightarrow -\infty$; это следует из формул

$$\left. \begin{aligned} A_h(t) &= \sqrt{\pi} (3t)^{-1/4} \cos \left[2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \mp \frac{\pi}{4} \right] + O(t^{-7/4}) \\ &\quad (-\text{для } h=1, \text{ } +\text{ для } h=2), \\ A_1(-t) &= \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (3t)^{-1/4} \exp \left\{ -2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right\} [1 + O(t^{-3/2})], \\ A_2(-t) &= \\ &= \sqrt{\pi} (3t)^{-1/4} \exp \left\{ +2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right\} [1 + O(t^{-3/2})], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

которые могут быть легко выведены из классических асимптотических представлений функций Бесселя $J_\nu(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Иногда приведение данного уравнения к каноническому виду может быть упрощено, если воспользоваться тем фактом, что предыдущие построения только незначительно изменяются (если вообще изменяются), когда правая часть уравнения (5) содержит также члены с z' и z'' , однако с коэффициентами того же порядка, что и коэффициент при z .

Именно с таким случаем мы встречаемся при изучении функций Бесселя порядка ν в окрестности точки перехода $x = \nu$, поскольку классическое уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (11)$$

при помощи простой подстановки

$$x = v + \left(\frac{v}{6}\right)^{1/3} t \quad (12)$$

может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{3} t y = -\mu \left[(2t + \mu t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + (1 + \mu t) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{6} t^2 y \right], \quad (13)$$

где

$$\mu = 6^{-1/3} v^{-2/3}.$$

Следовательно, полагая $F_1 \equiv A_1(t)$, $F_2 \equiv A_2(t)$ и

$$K(t, \tau) = A_1(\tau) \Phi_2(t) - A_2(\tau) \Phi_1(t), \quad (14)$$

где, в соответствии с формулой (1.8.16),

$$\Phi_h(t) = \mu \frac{(2t + \mu t^2) [-(1/3) t A_h(t)] + (1 + \mu t) A_h'(t) + (1/6) t^2 A_h(t)}{(1/3) [1 + \mu (2t + \mu t^2)] \pi} \quad (h = 1, 2), \quad (15)$$

мы получаем из соотношений (1.8.23) и (1.8.24)

$$y(t) = \gamma_1 Y_1(t) + \gamma_2 Y_2(t), \quad (16)$$

где

$$Y_h(t) = A_h(t) + \int_0^t [A_1(\tau) A_2(t) - A_2(\tau) A_1(t)] \Phi_h(\tau) d\tau \quad (h = 1, 2) \quad (17)$$

[здесь Φ_h — решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\Phi_h(t) - \int_0^t K(t, \tau) \Phi_h(\tau) d\tau = \Phi_h(t) \quad (h = 1, 2), \quad (18)$$

а γ_1, γ_2 — две постоянные, удовлетворяющие уравнениям $\gamma_1 A_1(0) + \gamma_2 A_2(0) = y(0)$, $\gamma_1 A_1'(0) + \gamma_2 A_2'(0) = y'(0)$. (19)

В частности, согласно формуле (1.8.27), мы имеем

$$Y_h(t) = A_h(t) + \int_0^t [A_1(t) A_2(\tau) - A_2(t) A_1(\tau)] \Phi_h(\tau) d\tau + O(\mu^2). \quad (20)$$

Уже простая формула (20) приводит нас к лучшим асимптотическим формулам для функций Бесселя J_ν и N_ν , чем более сложные формулы Никольсона.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что из (15) вытекает соотношение

$$\Phi_h(t) = \frac{3}{\pi} \left[A'_h(t) - \frac{t^2}{2} A_h(t) \right] \mu + O(\mu^2);$$

следовательно, приняв во внимание, что

$$\int_0^t \tau^2 A_1(\tau) A_2(\tau) d\tau = \frac{t^3}{5} A_1(t) A_2(t) + \frac{3}{5} [A_1(t) - t A'_1(t)] \times \\ \times [A_2(t) - t A'_2(t)] - \frac{3}{5} A_1(0) A_2(0),$$

$$\int_0^t \tau^2 A_h(\tau) d\tau = \frac{t^3}{5} A_h(t) + \frac{3}{5} [A_h(t) - t A'_h(t)]^2 - \frac{3}{5} A_h^2(0),$$

$$\int_0^t A_h(\tau) A'_h(\tau) d\tau = \frac{1}{2} A_h^2(t) - \frac{1}{2} A_h^2(0),$$

$$\int_0^t A_1(\tau) A'_2(\tau) d\tau = \frac{1}{2} A_1(t) A_2(t) - \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2} A_1(0) A_2(0),$$

$$\int_0^t A'_1(\tau) A_2(\tau) d\tau = \frac{1}{2} A_1(t) A_2(t) - \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2} A_1(0) A_2(0),$$

$$A_2(0) = \sqrt{3} A_1(0) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$A'_2(0) = -\sqrt{3} A'_1(0) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$

получим

$$Y_h(t) = A_h(t) - \frac{1}{10} \left\{ 3t^2 A'_h(t) + \left[2t - (-1)^h \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right] A_h(t) + \right. \\ \left. + \eta_h \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} A_{h+1}(t) \right\} \mu + O(\mu^2), \quad (21)$$

где $\eta_1 = +\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\eta_2 = -\sqrt{3}$, $A_3 \equiv A_1$.

Теперь мы должны найти асимптотические представления для постоянных γ_1 и γ_2 как в случае $y = J_\nu(x)$, так и в случае $y = N_\nu(x)$ (в последнем случае мы будем писать γ_1^* и γ_2^* вместо γ_1 и γ_2 соответственно).

Это довольно длительный процесс, поскольку он требует весьма точного определения асимптотических представлений четырех постоянных $J_\nu(\nu)$, $J'_\nu(\nu)$, $N_\nu(\nu)$ и $N'_\nu(\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Это может быть сделано при помощи метода перевала, применение которого в данном случае значительно упрощается, благодаря тому обстоятельству, что теперь аргумент *точно* (а не только приблизительно) равен порядку ν . Соответствующие вычисления подробно проведены в моей статье, цитированной на стр. 49. На основании результатов этой статьи мы приходим к формулам¹⁾

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(\nu) &\sim \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} (B_0\kappa - B_2\kappa^5 + B_3\kappa^7 - B_5\kappa^{11} + \dots), \\ N_\nu(\nu) &\sim -\frac{1}{2\pi} (B_0\kappa + B_2\kappa^5 + B_3\kappa^7 + B_5\kappa^{11} + \dots), \\ J'_\nu(\nu) &\sim \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} (B'_0\kappa^2 - B'_1\kappa^4 + B'_3\kappa^8 - B'_4\kappa^{10} + \dots), \\ N'_\nu(\nu) &\sim \frac{1}{2\pi} (B'_0\kappa^2 + B'_1\kappa^4 + B'_3\kappa^8 + B'_4\kappa^{10} + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}, \quad B_n = \sum_{m=0}^n \frac{(-6)^m}{m!} a_{n-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2n+1}{3} + m\right), \\ B'_n &= \sum_{m=0}^n \frac{(-6)^m}{m!} b_{n-m}^{(m)} \Gamma\left(\frac{2n+2}{3} + m\right), \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} z^k &= \left(\frac{1}{5!} + \frac{z}{7!} + \frac{z^2}{9!} + \dots\right)^m, \\ b_k^{(m)} &= a_k^{(m)} + \frac{1}{3!} a_{k-1}^{(m)} + \dots + \frac{1}{(2k+1)!} a_0^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

¹⁾ Первые члены этих формул численно совпадают с формулами, приведенными (без указания источника) в примечании к численным таблицам на стр. 98—99 второй части книги Ватсона «Теория бесселевых функций».

При помощи этих формул мы получаем из системы линейных алгебраических уравнений (19)

$$\left. \begin{aligned} \pi\gamma_1 &= \left(\frac{6}{v}\right)^{1/3} - \frac{1}{10} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{v} + O(v^{-5/3}), \\ \pi\gamma_2 &= \frac{1}{10\sqrt{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{v} + O(v^{-5/3}), \\ \pi\gamma_1^* &= \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{v} + O(v^{-5/3}), \\ \pi\gamma_2^* &= -\left(\frac{6}{v}\right)^{1/3} - \frac{1}{10} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{v} + O(v^{-5/3}); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \pi J_v \left[v + \left(\frac{1}{6}v\right)^{1/3} t \right] &= \left(\frac{6}{v}\right)^{1/3} A_1(t) - \\ &\quad - \frac{1}{10v} [3t^2 A_1'(t) + 2t A_1(t)] + O(v^{-5/3}), \\ \pi N_v \left[v + \left(\frac{1}{6}v\right)^{1/3} t \right] &= -\left(\frac{6}{v}\right)^{1/3} A_2(t) + \\ &\quad + \frac{1}{10v} [3t^2 A_2'(t) + 2t A_2(t)] + O(v^{-5/3}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Этими формулами можно воспользоваться для получения простых асимптотических представлений *наименьших по модулю нулей* $j_{v,1}$ и $n_{v,1}$ функций $J_v(x)$ и $N_v(x)$ соответственно. Действительно, мною найдены¹⁾ (см. приме-

¹⁾ Ватсон («Теория бесселевых функций», § 15—81) приводит только формулы

$$\begin{aligned} j_{v,1} &= v + 1,855757v^{1/3} + O(1), \\ n_{v,1} &= v + 0,931577v^{1/3} + O(1). \end{aligned}$$

Автору кажется замечательным тот факт, что при помощи других методов можно доказать, что оба остатка имеют порядок $O(v^{-1/3})$, а не $O(1)$.

чение 1 на стр. 49) следующие выражения:

$$\begin{aligned} j_{\nu, 1} &= \nu + 1,855757\nu^{1/3} + 1,03315\nu^{-1/3} + O(\nu^{-1}), \\ n_{\nu, 1} &= \nu + 0,931577\nu^{1/3} + 0,26035\nu^{-1/3} + O(\nu^{-1}). \end{aligned}$$

1.12. Некоторые обобщения теории уравнений Вольтерра

Вышеизложенная общая теория интегральных уравнений Вольтерра может быть обобщена в нескольких направлениях. Например, можно рассматривать ядра вида

$$K(x, y) = \frac{F(x, y)}{(x - y)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (1)$$

где $F(x, y)$ — некоторая непрерывная (или по крайней мере измеримая и ограниченная) функция.

Несмотря на то обстоятельство, что при $\alpha \geq 1/2$ квадрат такого ядра *не* является интегрируемым, соответствующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода легко может быть решено. В самом деле, последовательные итерированные ядра $K_n(x, y)$, начиная с некоторого номера n , не только принадлежат классу L_2 , но также *ограничены*.

Чтобы доказать это, используем подстановку

$$z = y + (x - y)t,$$

которая дает нам

$$\begin{aligned} K_2(x, y) &= \int_y^x \frac{F(x, z) F(z, y)}{(x - z)^\alpha (z - y)^\alpha} dz = \\ &= (x - y)^{1-2\alpha} \int_0^1 \frac{F[x, y + (x - y)t] F[y + (x - y)t, y]}{t^\alpha (1 - t)^\alpha} dt = \\ &= (x - y)^{1-2\alpha} F_2(x, y) \quad (2) \end{aligned}$$

и последовательно

$$\begin{aligned} K_3(x, y) &= (x - y)^{2-3\alpha} F_3(x, y), \\ K_4(x, y) &= (x - y)^{3-4\alpha} F_4(x, y), \dots, \end{aligned}$$

где F_2, F_3, F_4, \dots — некоторые ограниченные функции. Следовательно, все ядра, K_n, K_{n-1}, \dots ограничены, коль скоро $(n - 1)(1 - \alpha) > \alpha$.

С другой стороны, уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

всегда может быть приведено к аналогичному уравнению с ядром K_2 , или K_3 , K_4, \dots , так как при помощи *композиции* [см. § 1.4 и формулу (1.9.5)] обеих частей уравнения с функцией $\lambda K(x, y)$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda^2 \int_0^x K_2(x, y) \varphi(y) dy = f_2(x) \equiv f(x) + \\ + \lambda \int_0^x K(x, y) f(y) dy \end{aligned} \quad (3)$$

и последовательно

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda^3 \int_0^x K_3(x, y) \varphi(y) dy = f_3(x) \equiv f_2(x) + \\ + \lambda \int_0^x K(x, y) f_2(y) dy, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Аналогичное (даже более простое) преобразование применимо также к интегральному уравнению первого рода, в частности к важному *уравнению Абеля*

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x), \quad (4)$$

для которого $F \equiv 1$, $\alpha = 1/2$.

Это уравнение встречается в задаче о таутохроме: найти кривую, скользя вдоль которой без трения, тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время, независимо от ее начального положения, или, более обще, за отрезок времени, представляющий собой заданную функцию начального положения частицы. Абель решил это уравнение еще в 1825 г., применив

в основном тот же способ, который будет использован нами, однако он не осознавал общего значения функциональных уравнений этого типа.

Из формулы (2), примененной к уравнению (4), следует, что

$$K_2(x, y) = \int_0^1 [t(1-t)]^{-1/2} dt = \pi.$$

Поэтому композиция уравнения (4) с его ядром дает

$$\pi \int_0^x \varphi(y) dy = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} dy;$$

откуда непосредственно получается изумительно простое решение:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} dy. \quad (5)$$

В развернутом виде оно записывается следующим образом (предполагая, что функция f дифференцируема, и интегрируем по частям):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[2 \sqrt{x} f(0) + 2 \int_0^x \sqrt{x-y} f'(y) dy \right],$$

т. е.

$$\varphi(x) = \frac{f(0)}{\pi \sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{x-y}} dy. \quad (6)$$

В общем случае обобщенное уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (7)$$

легко решается при помощи композиции с ядром $(x-y)^{\alpha-1}$, так как соотношение

$$\int_y^x \frac{dz}{(x-z)^\alpha (z-y)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

приводит нас к выражению ¹⁾

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy = \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \right]. \quad (8)\end{aligned}$$

Относительно других типов *сингулярных уравнений Вольтерра*, т. е. уравнений, у которых либо основной интервал имеет вид $(-\infty, x)$, либо ядро неинтегрируемо, см. книгу Дейвиса [14].

Далее, теорию уравнений Вольтерра можно распространить на *системы уравнений*

$$\varphi_r(x) - \lambda \sum_{s=1}^n \int_0^x K_{r,s}(x, y) \varphi_s(y) dy = f_r(x) \quad (r=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Один из методов решения такой системы состоит в том, что решается одно из уравнений относительно одной из неизвестных функций и найденное решение подставляется в оставшиеся уравнения. Это приводит нас к другой системе вида (9), но уже с $n-1$ неизвестными функциями. Например, если мы положим для простоты $\lambda=1$ и обозначим через $H(x, y)$ резольвентное ядро, соответствующее (при $\lambda=1$) ядру $K_{1,1}(x, y)$, то из первого уравнения системы (9) получим

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= f_1(x) + \sum_{s=2}^n \int_0^x K_{1,s}(x, y) \varphi_s(y) dy - \\ &- \int_0^x H(x, y) f_1(y) dy - \sum_{s=2}^n \int_0^x \varphi_s(y) dy \int_y^x H(x, z) K_{1,s}(z, y) dz,\end{aligned}$$

¹⁾ Л. Тонелли [см. *Math. Ann.* 99 (1929), 183—199] обстоятельно изучил уравнения Абеля и, в частности, пришел к выводу, что решение (8) справедливо также и тогда, когда функция f абсолютно непрерывна. (Напомним, что абсолютно непрерывная функция дифференцируема почти всюду.)

т. е. выражение вида

$$\varphi_1(x) = F(x) + \sum_{s=2}^n \int_0^x A_s(x, y) \varphi_s(y) dy,$$

где $F(x)$ и $A_s(x, y)$ — известные функции. Следовательно, подставляя это выражение во 2-е, 3-е, ... и n -е уравнения исходной системы, мы приведем ее к аналогичной системе из $n-1$ уравнений относительно неизвестных функций $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$.

Другой, возможно более удобный, путь исследования системы вида (9) состоит в непосредственном применении метода последовательных приближений; мы можем даже использовать результаты, полученные в § 1.3, и положить

$$\varphi_r(x) = f_r(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \psi_{r,m}(x) \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где $\psi_{r,m}$ — новые неизвестные функции, которые и подлежат определению. Подставляя эти соотношения в систему (9) и интегрируя по частям (что может быть оправдано рассуждениями, аналогичными приведенным в § 1.5), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \psi_{r,m}(x) - \sum_{s=1}^n \left[\lambda \int_0^x K_{r,s}(x, y) f_s(y) dy + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m+1} \int_0^x K_{r,s}(x, y) \psi_{s,m}(y) dy \right] = 0; \end{aligned}$$

приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях λ , находим

$$\begin{aligned} \psi_{r,1}(x) &= \sum_{s=1}^n \int_0^x K_{r,s}(x, y) f_s(y) dy, \\ \psi_{r,2}(x) &= \sum_{s=1}^n \int_0^x K_{r,s}(x, y) \psi_{s,1}(y) dy, \end{aligned}$$

и в общем случае

$$\psi_{r,m}(x) = \sum_{s=1}^n \int_0^x K_{r,s}(x, y) \psi_{s, m-1}(y) dy. \quad (11)$$

При желании этим формулам можно было бы придать более удобный вид, рассматривая класс обобщенных интегрированных ядер. Например, выражение для $\psi_{r,2}(x)$ может быть записано в виде

$$\psi_{r,2}(x) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \int_0^x K_{r,s}(x, z) dz \int_0^z K_{s,t}(z, y) f_t(y) dy,$$

т. е.

$$\psi_{r,2}(x) = \sum_{t=1}^n \int_0^x K_{r,t}^{(2)}(x, y) f_t(y) dy, \quad (12)$$

где

$$K_{r,t}^{(2)}(x, y) = \sum_{s=1}^n \int_y^x K_{r,s}(x, z) K_{s,t}(z, y) dz. \quad (13)$$

Доказательство того, что ряд (10) сходится абсолютно и почти равномерно¹⁾ при любых λ (в предположении, что ядра $K_{r,s}$ принадлежат классу L_2), вполне аналогично приведенному в § 1.4, и, следовательно, его можно здесь не воспроизводить.

1.13. Нелинейные уравнения Вольтерра

В известном смысле теория нелинейных интегральных уравнений Вольтерра родилась раньше, чем теория линейных уравнений Вольтерра, поскольку классический метод последовательных приближений для дифференциальных

¹⁾ См. стр. 24.

уравнений¹⁾ в своей простейшей форме состоит, по существу, в преобразовании дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

в нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F[t, y(t)] dt$$

и решении этого уравнения при помощи последовательных приближений

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F[t, y_{n-1}(t)] dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Этот метод можно без труда распространить на более общее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F[x, y; \varphi(y)] dy, \quad (1)$$

при весьма слабых ограничениях на функции $F(x, y; z)$ и $f(x)$ ²⁾. Точнее, достаточно предположить, что для любой пары z_1, z_2 выполняется условие

$$|F(x, y; z_1) - F(x, y; z_2)| \leq a(x, y) |z_1 - z_2| \quad (2)$$

и что, кроме того,

$$\left| \int_0^x F[x, y; f(y)] dy \right| \leq n(x), \quad (2')$$

где $a(x, y)$ и $n(x)$ — некоторые L_2 -функции, т. е. такие

¹⁾ Использованный в явном виде уже Лиувиллем (1838 г.) и затем Каке (1864 г.), Фуксом (1870 г.) и Пеано (1888 г.), но вполне осознанный как фундаментальный метод анализа только после публикации Пикара (1893 г.), придавшего ему наиболее общую форму.

²⁾ Относительно исследования уравнения (1) в пространстве непрерывных функций см. Sato T., *Compositio Math.*, **11** (1953), 271—290.

функции, что в основной области ($0 \leq y \leq x \leq h$)

$$\int_0^x n^2(y) dy \leq N^2, \quad \int_0^h dx \int_0^x a^2(x, y) dy \leq A^2, \quad (3)$$

где N^2 и A^2 — две положительные постоянные. Положив

$$\int_0^x a^2(x, y) dy = \mathcal{A}^2(x), \quad (4)$$

можно записать второе из условий (3) в виде

$$\int_0^h \mathcal{A}^2(x) dx \leq A^2. \quad (5)$$

Как и в линейном случае, мы попытаемся получить решение нашего уравнения как предел последовательности $\{\varphi_n\}$, первый элемент которой есть заданная функция $\varphi_0(x) \equiv f(x)$, а остальные элементы вычисляются согласно рекуррентной формуле

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x F[x, y; \varphi_{n-1}(y)] dy \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Прежде всего имеем

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_0^x F[x, y; f(y)] dy \right| \leq n(x);$$

в общем случае

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_0^x |F[x, y; \varphi_n(y)] - F[x, y; \varphi_{n-1}(y)]| dy \leq \\ &\leq \int_0^x a(x, y) |\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)| dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

так что, используя неравенство Буняковского—Шварца,

получаем

$$\begin{aligned} [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)]^2 &\leq \int_0^x a^2(x, y) dy \int_0^x [\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)]^2 dy = \\ &= \mathcal{A}^2(x) \int_0^x [\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)]^2 dy. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]^2 \leq n^2(x),$$

$$[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]^2 \leq \mathcal{A}^2(x) \int_0^x n^2(y) dy \leq N^2 \mathcal{A}^2(x),$$

$$[\varphi_3(x) - \varphi_2(x)]^2 \leq N^2 \mathcal{A}^2(x) \int_0^x \mathcal{A}^2(y) dy,$$

$$[\varphi_4(x) - \varphi_3(x)]^2 \leq N^2 \mathcal{A}^2(x) \int_0^x \mathcal{A}^2(y) dy \int_0^y \mathcal{A}^2(z) dz,$$

.....

и, таким образом, используя еще раз соотношение (1.5.7), получаем в общем случае

$$[\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)]^2 \leq$$

$$\leq N^2 \mathcal{A}^2(x) \frac{1}{n!} \left[\int_0^x \mathcal{A}^2(y) dy \right]^n \leq N^2 \mathcal{A}^2(x) \frac{A^{2n}}{n!},$$

т. е.

$$|\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq N \mathcal{A}(x) \frac{A^n}{\sqrt{n!}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Но это показывает, что бесконечный ряд

$$\Phi(x) = \varphi_1(x) + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + [\varphi_3(x) - \varphi_2(x)] + \dots, \quad (7)$$

n -я частная сумма которого равна $\varphi_n(x)$, сходится абсолютно, если только функция $\mathcal{A}(x)$ конечна, поскольку этот ряд, если отбросить его первый член, мажорируется рядом

$$N \mathcal{A}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\sqrt{n!}},$$

который всегда сходится (§ 1.5); поэтому мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \Phi(x), \quad (8)$$

причем ряд (7) сходится *почти равномерно* (см. стр. 24).

Чтобы доказать теперь, что предельная функция $\Phi(x)$ дает решение исходного уравнения (1), мы положим

$$\Phi(x) = \varphi_n(x) + R_n(x) \quad (9)$$

и заметим, что $R_n(x)$ представляет собой L_2 -функцию, такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h R_n^2(x) dx = 0,$$

поскольку

$$|R_n(x)| \leq N \mathcal{A}(x) \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{A^m}{\sqrt{m!}}.$$

Далее, заметим, что, как следует из соотношений (6) и (9),

$$\begin{aligned} \Phi(x) - f(x) - \int_0^x F[x, y; \Phi(y)] dy = \\ = R_n(x) + \int_0^x \{F[x, y; \varphi_{n-1}(y)] - F[x, y; \Phi(y)]\} dy, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi(x) - f(x) - \int_0^x F[x, y; \Phi(y)] dy \right\}^2 \leq \\ \leq 2R_n^2(x) + 2 \left\{ \int_0^x a(x, y) |R_{n-1}(y)| dy \right\}^2. \end{aligned}$$

Но, согласно неравенству Буняковского — Шварца,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^x a(x, y) |R_{n-1}(y)| dy \right\}^2 \leq \\ \leq \mathcal{A}^2(x) \int_0^x R_{n-1}^2(y) dy \leq \mathcal{A}^2(x) \int_0^h R_{n-1}^2(y) dy; \end{aligned}$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_0^h \left\{ \Phi(x) - f(x) - \int_0^x F[x, y; \Phi(y)] dy \right\}^2 dx &\leq \\ &\leq 2 \int_0^h R_n^2(x) dx + 2A^2 \int_0^h R_{n-1}^2(y) dy \end{aligned}$$

и, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем отсюда, что интеграл в левой части равен нулю всюду, где функция $\mathcal{A}(x)$ конечна, т. е. что функция $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Кроме того, если $f(x)$ принадлежит классу L_2 , то $\Phi(x)$ также принадлежит этому классу, поскольку функции $\varphi_n(x)$ являются L_2 -функциями и ряд (7) сходится почти равномерно.

Наконец, мы докажем, что $\Phi(x)$ представляет собой *единственное решение* данного уравнения (1) в классе L_2 , с точностью до функций, равных нулю почти всюду.

В самом деле, если уравнение (1) имеет другое решение $\Phi^*(x)$ класса L_2 , то мы имеем

$$\Phi(x) - \Phi^*(x) = \int_0^x \left\{ F[x, y; \Phi(y)] - F[x, y; \Phi^*(y)] \right\} dy.$$

Отсюда, воспользовавшись методом, аналогичным приведенному выше, находим

$$\begin{aligned} [\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 &\leq \left\{ \int_0^x |F[x, y; \Phi(y)] - F[x, y; \Phi^*(y)]| dy \right\}^2 \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^x a(x, y) |\Phi(y) - \Phi^*(y)| dy \right\}^2 \leq \\ &\leq \int_0^x a^2(x, y) dy \int_0^x [\Phi(y) - \Phi^*(y)]^2 dy, \end{aligned}$$

т. е.

$$[\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 \leq \mathcal{A}^2(x) \int_0^x [\Phi(y) - \Phi^*(y)]^2 dy. \quad (10)$$

Следовательно, полагая для краткости

$$\int_0^h [\Phi(y) - \Phi^*(y)]^2 dy = k^2,$$

при помощи последовательных подстановок в (10) получаем

$$[\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 \leq k^2 \mathcal{A}^2(x),$$

$$[\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 \leq k^2 \mathcal{A}^2(x) \int_0^x \mathcal{A}^2(y) dy,$$

$$[\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 \leq k^2 \mathcal{A}^2(x) \int_0^x \mathcal{A}^2(y) dy \int_0^y \mathcal{A}^2(z) dz,$$

.....

и в общем случае, снова используя формулу (1.5.7), находим

$$\int_0^x [\Phi(x) - \Phi^*(x)]^2 dx \leq k^2 \frac{1}{n!} \left[\int_0^x \mathcal{A}^2(x) dx \right]^n \leq k^2 \frac{A^{2n}}{n!}.$$

Отсюда мы получаем наше утверждение, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы доказали, что *нелинейное уравнение Вольтера второго рода (1), где f и F являются L_2 -функциями, удовлетворяющими условиям (2), (2') и (3), имеет одно и только одно решение $\Phi(x)$ в классе L_2 (с точностью до функций, равных нулю почти всюду). Этим решением является ряд (7), который сходится абсолютно и почти равномерно и общий член которого может быть подсчитан согласно рекуррентной формуле (6).*

Чтобы оценить важность этого результата, мы заметим, что многие задачи *нелинейной механики* приводят к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = \mu f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

где μ *обычно* (но не *всегда*) обозначает малый параметр. При помощи метода Фубини (§ 1.8) это уравнение не-

посредственно может быть приведено к *интегро-дифференциальному* нелинейному уравнению

$$y(x) - \frac{\mu}{\omega} \int_0^x \sin[\omega(x - \xi)] f[\xi, y(\xi), y'(\xi)] d\xi = \\ = \gamma_1 \cos(\omega x) + \gamma_2 \sin(\omega x), \quad (11)$$

где γ_1 и γ_2 — две произвольные постоянные.

Это уравнение может быть изучено теми же методами, что и выше; однако для краткости мы просто заметим, что *если функция f не зависит от производной y'* , то уравнение (11) имеет вид (1), причем

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mu}{\omega}, \\ F[x, y; \varphi(y)] &= \sin[\omega(x - y)] f[y, \varphi(y)], \\ f(x) &= \gamma_1 \cos(\omega x) + \gamma_2 \sin(\omega x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Например, в случае электрических колебаний в цепи, содержащей железный сердечник¹⁾,

$$\omega^2 = \frac{A}{C}, \quad \mu = -\frac{B}{C}, \quad f(x, y, y') = y^3,$$

где A , B и C — три положительные постоянные; следовательно, мы должны рассмотреть уравнение (1) в случае

$$F[x, y; \varphi(y)] = \sin[\omega(x - y)] [\varphi(y)]^3.$$

¹⁾ Minor sky N., Introduction to non-linear mechanics, Ann Arbor, 1947, 192.

2.1. Решение методом последовательных приближений: ряд Неймана

Метод последовательных приближений, с успехом примененный в § 1.3 — 1.5 к интегральным уравнениям Вольterra второго рода, еще более просто применяется к основному уравнению Фредгольма второго рода¹⁾

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (1)$$

Однако решение, полученное таким путем, может оказаться только *формальным*, т. е., если модуль $|\lambda|$ параметра λ не будет *достаточно малым*, бесконечный ряд, представляющий резольвентное ядро, может стать расходящимся. По сравнению с предыдущей главой применение метода последовательных приближений здесь облегчается тем, что интегрирование всегда совершается в пределах от 0 до 1 и, следовательно, законность перемены порядка интегрирования очевидна.

Как и в § 1.3, полагаем

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \psi_1(x) + \lambda^2 \psi_2(x) + \dots \quad (2)$$

Этот ряд называется *рядом Неймана*. Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int K(x, y) f(y) dy, \\ \psi_2(x) &= \int K(x, y) \psi_1(y) dy = \int K_2(x, y) f(y) dy, \\ \psi_3(x) &= \int K(x, y) \psi_2(y) dy = \int K_3(x, y) f(y) dy, \\ &\dots \end{aligned}$$

¹⁾ Так как рассматриваемые в настоящей главе интегралы обычно имеют пределы 0 и 1, мы будем часто опускать эти пределы. Кроме того, мы не будем оговаривать каждый раз, что независимая переменная x изменяется в интервале $(0,1)$.

где

$$\left. \begin{aligned} K_2(x, y) &= \int K(x, z) K(z, y) dz, \\ K_3(x, y) &= \int K(x, z) K_2(z, y) dz, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или в общем виде

$$K_n(x, y) = \int K_h(x, z) K_{n-h}(z, y) dz$$

$$(n = 2, 3, \dots; h = 1, 2, \dots, n-1; K_1 \equiv K). \quad (4)$$

Основное отличие по сравнению со случаем уравнения Вольтерра состоит в том, что ряд Неймана (2) или же ряд для резольвентного ядра

$$-H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \dots \quad (5)$$

сходится теперь только при *достаточно малом* $|\lambda|$. Иными словами, хотя $H(x, y; \lambda)$ продолжает оставаться аналитической функцией параметра λ , она уже не является *целой* функцией λ .

Мы укажем теперь оценку снизу для радиуса сходимости степенного ряда (5). Для этого заметим, что, *сохраняя основные предположения § 1.4 о том, что ядро $K(x, y)$ является L_2 -функцией, т. е. предполагая, что (поскольку теперь $h=1$)*

$$\|K\|^2 = \iint K^2(x, y) dx dy = \int A^2(x) dx = \int B^2(y) dy \leq N^2, \quad (6)$$

где

$$A(x) = \left[\int K^2(x, y) dy \right]^{1/2}, \quad B(y) = \left[\int K^2(x, y) dx \right]^{1/2}, \quad (7)$$

получаем последовательно

$$\begin{aligned} K_2^2(x, y) &= \left[\int K(x, z) K(z, y) dz \right]^2 \leq A^2(x) B^2(y), \\ K_3^2(x, y) &\leq \int K^2(x, z) dz \int K_2^2(z, y) dz \leq \\ &\leq A^2(x) B^2(y) \int A^2(z) dz \leq A^2(x) B^2(y) N^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4^2(x, y) &\leq \int K^2(x, z) dz \int K_3^2(z, y) dz \leq \\ &\leq A^2(x) B^2(y) N^2 \int A^2(z) dz \leq A^2(x) B^2(y) N^4, \end{aligned}$$

и в общем случае

$$|K_{n+2}(x, y)| \leq A(x) B(y) N^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Отсюда следует, что ряд (5), если отбросить в нем первый член, допускает мажоранту

$$A(x) B(y) |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda| N)^n;$$

последний ряд представляет собой сумму членов *геометрической прогрессии* со знаменателем $|\lambda| N$; следовательно, он сходится, если $|\lambda| N < 1$, т. е. если

$$|\lambda| < \|K\|^{-1}. \quad (9)$$

Мы видим, таким образом, что в этом предположении частные суммы ряда (5) обладают мажорантой вида

$$CA(x) B(y),$$

где C — некоторая постоянная, т. е. мажорантой, являющейся L_2 -функцией как относительно x , так и относительно y . Иными словами, ряд (5) представляет собой *почти равномерно* сходящийся ряд, и, следовательно (в силу фундаментальной теоремы Лебега), может быть проинтегрирован почленно как по x , так и по y . В силу теоремы Егорова — Северини¹⁾ этот ряд становится равномерно сходящимся, если точки, в которых $A(x) = \infty$ или $B(y) = \infty$, исключить из интервалов $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ при помощи подходящего покрытия множествами, общая мера которых не превосходит произвольного заданного $\epsilon > 0$.

Кроме того, предыдущие рассуждения показывают, что резольвентное ядро $H(x, y; \lambda)$, определенное рядом

¹⁾ См., например, Goffman C., Real Functions, New York, 1953, стр. 187, где почти равномерно сходящийся ряд назван приближенно равномерно сходящимся (approximately uniformly convergent). [См. также, Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., 1950, стр. 111—119. — *Прим. перев.*]

(5), есть аналитическая функция, особые точки которой лежат вне (или на границе) круга (9).

Поскольку почленное интегрирование допустимо, то, используя формулу (4) при условии (9), получаем

$$\begin{aligned} - \int K(x, z) H(z, y; \lambda) dz &= - \int H(x, z; \lambda) K(z, y) dz = \\ &= K_2(x, y) + \lambda K_3(x, y) + \dots = \\ &= \lambda^{-1} [H(x, y; \lambda) + K(x, y)], \end{aligned}$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} K(x, y) + H(x, y; \lambda) &= \lambda \int K(x, z) H(z, y; \lambda) dz = \\ &= \lambda \int H(x, z; \lambda) K(z, y) dz. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Больше того, принимая во внимание, что все члены этого двойного равенства являются аналитическими функциями λ , мы можем утверждать, что основное уравнение (10) для резольвентного ядра справедливо (почти всюду) не только внутри круга (9), но и во всей области существования резольвентного ядра H в комплексной λ -плоскости ¹⁾. Отсюда, как и в § 1.4, следует, что если $f(x)$ принадлежит классу L_2 , то исходное уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение в том же классе L_2 ; это решение определяется по формуле

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int H(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (11)$$

в области существования \mathcal{H} функции H .

Легко также увидеть, что решение (11) является *единственным* L_2 -решением нашего уравнения не только внутри круга $|\lambda| < \|K\|^{-1}$, но и во всей области \mathcal{H} . В самом деле, если в точке $\lambda = \lambda_0$ области \mathcal{H} *однородное уравне-*

¹⁾ Этот важный принцип аналитического продолжения основан на том факте, что нули аналитической функций не могут иметь предельных точек внутри области определения функции. Следовательно, две аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$, совпадающие на некотором замкнутом ограниченном бесконечном множестве точек, должны совпадать тождественно, если только это множество содержится в области регулярности обеих функций.

ние

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (12)$$

допускает некоторое нетривиальное решение $\varphi_0(x)$, то, учитывая (10), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \lambda_0 \int K(x, y) \varphi_0(y) dy = \\ &= -\lambda_0 \int H(x, y; \lambda_0) \varphi_0(y) dy + \\ &+ \lambda_0^2 \int \varphi_0(y) dy \int H(x, z; \lambda_0) K(z, y) dz = \\ &= -\lambda_0 \int H(x, y; \lambda_0) \varphi_0(y) dy + \\ &+ \lambda_0^2 \int H(x, z; \lambda_0) dz \int K(z, y) \varphi_0(y) dy = \\ &= -\lambda_0 \int H(x, y; \lambda_0) \varphi_0(y) dy + \\ &+ \lambda_0 \int H(x, z; \lambda_0) \varphi_0(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и следует, что функция $\varphi_0(x)$ равна нулю почти всюду.

Таким образом, доказана следующая основная теорема:

Каждому интегрируемому с квадратом ядру $K(x, y)$ соответствует резольвентное ядро $H(x, y; \lambda)$, аналитическое по λ , регулярное по крайней мере внутри круга $|\lambda| < \|K\|^{-1}$ и представимое там степенным рядом (5). Пусть \mathcal{H} — область существования резольвентного ядра в комплексной λ -плоскости. Если функция $f(x)$ принадлежит классу L_2 , то единственное интегрируемое с квадратом решение уравнения Фредгольма (1) в области \mathcal{H} определяется формулой (11).

Трудность состоит в том, что резольвентное ядро только потенциально определено степенным рядом (5). Кроме того, до сих пор нам ничего не известно относительно природы и распределения особых точек функции $H(x, y; \lambda)$, а также относительно того, что произойдет с решением уравнения (1), если λ совпадает с одной из этих точек.

Иногда может оказаться полезной следующая сокращенная запись уравнения (1):

$$\mathcal{F}_x[\varphi(y)] = f(x),$$

в которой мы ввели *линейный оператор Фредгольма*

$$\mathcal{F}_x[\varphi(y)] \equiv \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy. \quad (13)$$

Введем также *сопряженный оператор Фредгольма*

$$\mathcal{F}_x^*[\varphi(y)] \equiv \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x) \varphi(y) dy. \quad (14)$$

Для любой пары функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, таких, что при вычислении повторного интеграла

$$\int_0^1 \psi(x) dx \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$$

можно менять порядок интегрирования, очевидно, имеем

$$\int \mathcal{F}_x[\varphi(y)] \psi(x) dx = \int \mathcal{F}_x^*[\psi(y)] \varphi(x) dx. \quad (15)$$

Эта формула часто называется *формулой Грина* для оператора \mathcal{F} , поскольку ее можно рассматривать как далеко идущее обобщение формулы Грина из теории линейных дифференциальных уравнений.

2.2. Пример

Чтобы получить представление о возможных ответах на поставленные в предыдущем параграфе вопросы, целесообразно использовать в качестве ядра интегрального уравнения Фредгольма ядро из § 1.7, т. е. рассмотреть интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy = f(x). \quad (1)$$

Итерированные ядра здесь вычисляются проще, чем в § 1.7;

мы имеем

$$K_2(x, y) = \int e^{x-z} e^{z-y} dz = e^{x-y} \int dz = K(x, y),$$

и поэтому все ядра K_n совпадают с исходным ядром K , а ряд (2.1.5) приобретает вид

$$-H(x, y; \lambda) = K(x, y)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots). \quad (2)$$

Таким образом,

$$H(x, y; \lambda) = \frac{e^{x-y}}{\lambda - 1}, \quad (3)$$

откуда видно, что резольвентное ядро в самом деле представляет собой аналитическую функцию λ , регулярную на всей λ -плоскости, за исключением точки $\lambda = 1$, являющейся простым полюсом этого ядра.

Следовательно, по теореме предыдущего параграфа уравнение (1) для всех $\lambda \neq 1$ имеет одно и только одно решение ¹⁾, определяемое формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} e^x \int e^{-y} f(y) dy. \quad (4)$$

Тот же результат может быть получен более элементарным путем, если положить

$$\int_0^1 e^{-y} \varphi(y) dy = \xi.$$

Тогда исходное уравнение записывается в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \xi e^x \quad (5)$$

и, следовательно, неизвестная величина ξ должна удовлетворять уравнению

$$\xi = \int e^{-x} [f(x) + \lambda \xi e^x] dx = \int e^{-x} f(x) dx + \lambda \xi,$$

т. е. уравнению

$$(1 - \lambda) \xi = \int e^{-x} f(x) dx. \quad (6)$$

¹⁾ В тех случаях, когда это не может повлечь за собой недоразумения, мы не будем делать оговорок: «класса L_2 », «пренебрегая нуль-функциями» и т. п.

Таким образом, если только $\lambda \neq 1$, то

$$\xi = \frac{1}{1-\lambda} \int e^{-x} f(x) dx,$$

и, подставляя это выражение в уравнение (5), мы снова получаем решение (4). Если же $\lambda = 1$, то формула (6) показывает, что решение нашего уравнения, *вообще говоря, не существует*, поскольку данная функция $f(x)$ может, конечно, и не удовлетворять условию

$$\int e^{-x} f(x) dx = 0. \quad (7)$$

В том частном случае, когда это условие выполнено (например, при $f(x) \equiv 0$), существует *бесконечное число решений*, определяемых по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + Ce^x, \quad (8)$$

где C означает произвольную постоянную.

Эти рассуждения применимы и ко многим другим случаям. Мы увидим в § 2.3—2.4, что в общем случае особые точки резольвентного ядра H могут быть только *полюсами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, положение которых на λ -плоскости не зависит от x и y . Кроме того, при $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$ и т. д. уравнение (2.1.1), вообще говоря, не разрешимо, тогда как соответствующее однородное уравнение (2.1.12) имеет бесконечное число нетривиальных решений. (*Тривиальным* решением является *нуль-функция*, т. е. решение, обращающееся в нуль почти всюду.)

2.3. Уравнения Фредгольма с ядрами Пинкерле — Гурса

Уравнение из предыдущего параграфа могло быть легко исследовано, поскольку его ядро e^{x-y} можно рассматривать как произведение функции e^x , зависящей только от x , на функцию e^{-y} , зависящую только от y . В настоящем параграфе мы увидим, что если интегральное уравнение Фредгольма обладает ядром, представляющим собой сумму n произведений функций, зависящих только от x , на функции, зависящие только от y , то оно может быть приведено к системе n линейных алгебраических уравне-

ний с n неизвестными¹⁾. Такие ядра обычно называются ядрами Пинкерле — Гурса.

Более точно мы скажем, что ядро $K(x, y)$ является ядром Пинкерле — Гурса, или сокращенно *PG-ядром*, если

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y), \quad (1)$$

где $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x); Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ — две системы *линейно независимых* L_2 -функций²⁾ на основном интервале $(0, 1)$.

Если положить

$$\int Y_k(x) \varphi(x) dx = \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

то основное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (3)$$

превращается в уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \xi_k X_k(x). \quad (4)$$

Уже отсюда видно, что разность $\varphi(x) - f(x)$ должна совпадать с соответствующим образом выбранной линейной комбинацией функций $X_k(x)$.

Далее, если мы умножим уравнение (4) на $Y_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) и потом проинтегрируем в пределах от 0

¹⁾ Следует подчеркнуть, что эквивалентность интегрального уравнения и системы алгебраических уравнений будет в этом случае *полной*; приближенная эквивалентность может быть установлена всегда, например, при помощи замены ядра K и заданной функции f приближающими их кусочно-постоянными функциями (ср. § 1.2).

²⁾ Функции $f_1(x), f_2(x), \dots$ (даже в бесконечном числе) называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация

$$\mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) + \dots + \mu_n f_n(x)$$

n функций обращается в нуль *почти всюду* на основном интервале только при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$.

Каждая функция $f(x)$, принадлежащая системе линейно независимых функций, обязательно является *ненулевой* функцией, и, следовательно, ее *норма* должна быть всегда положительной (и никогда не может быть равной нулю).

Следовательно, суть проблемы сводится к рассмотрению определителя системы (6):

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

который является многочленом n -й степени относительно λ .

Если $\mathcal{D}(\lambda) \neq 0$, то система (6) имеет одно и только одно решение, определяемое по формулам Крамера,

$$\xi_k = \frac{1}{\mathcal{D}(\lambda)} (\mathcal{D}_{1k} b_1 + \mathcal{D}_{2k} b_2 + \dots + \mathcal{D}_{nk} b_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где \mathcal{D}_{hk} означает алгебраическое дополнение элемента определителя с индексами h, k ; соответственно, уравнение (3) имеет единственное решение

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\mathcal{D}(\lambda)} \sum_{h=1}^n (\mathcal{D}_{1h} b_1 + \mathcal{D}_{2h} b_2 + \dots + \mathcal{D}_{nh} b_n) X_h(x), \quad (8)$$

в то время как соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (9)$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Далее, принимая во внимание выражения (5) для b_h , можно также записать решение (8) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\mathcal{D}(\lambda)} \int \left\{ \sum_{h=1}^n [\mathcal{D}_{1h} Y_1(y) + \mathcal{D}_{2h} Y_2(y) + \dots \right. \\ \left. \dots + \mathcal{D}_{nh} Y_n(y)] X_h(x) \right\} f(y) dy,$$

но сумму под знаком интеграла можно рассматривать,

как взятое со знаком минус разложение определителя $(n+1)$ -го порядка¹⁾

$$\mathcal{D}(x, y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \dots & X_n(x) \\ Y_1(y) & 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ Y_2(y) & -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n(y) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}; \quad (10)$$

следовательно, мы можем написать

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\mathcal{D}(\lambda)} \int \mathcal{D}(x, y; \lambda) f(y) dy, \quad (11)$$

используя предыдущее выражение для $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае *резольвентное ядро* $H(x, y; \lambda)$ *совпадает с отношением определителей* (10) *и* (7):

$$H(x, y; \lambda) = \frac{\mathcal{D}(x, y; \lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}, \quad (12)$$

т. е. с отношением двух *многочленов* n -й степени относительно λ (знаменатель от x и y не зависит), и это имеет важные следствия. В данный момент мы отметим только одно из них: единственными возможными особыми точками функции $H(x, y; \lambda)$ на λ -плоскости являются корни уравнения $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, которые мы назовем *собственными значениями* нашего ядра $K(x, y)$.

Если $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, то неоднородное уравнение (3) в общем случае не имеет решения, поскольку система линейных алгебраических уравнений с равным нулю определителем разрешима только при *определенных* значениях величин, стоящих в правой части.

¹⁾ В самом деле, если мы разложим определитель (10) по элементам первой строки, а соответствующие миноры — по элементам их первых столбцов, то получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, y; \lambda) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} X_k \sum_{h=1}^n (-1)^h Y_h \frac{\mathcal{D}_{hk}}{(-1)^{h+k}} = \\ &= - \sum_{k=1}^n X_k \sum_{h=1}^n \mathcal{D}_{hk} Y_h. \end{aligned}$$

Кроме того, из любого нетривиального решения $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}$ однородной системы алгебраических уравнений мы получаем нетривиальное решение *однородного* уравнения (9), которое называется *собственной функцией*, и обратно.

Более точно, из теории систем линейных алгебраических уравнений¹⁾ мы можем заключить, что если λ совпадает с некоторым собственным значением λ_0 , для которого определитель $\mathcal{D}(\lambda_0)$ имеет ранг²⁾ p ($1 \leq p \leq n-1$), и если $n-p=r$, то существует ∞^r решений однородной системы (6). Эти решения могут быть представлены формулами вида

$$\xi_k = B_{1k}C_1 + B_{2k}C_2 + \dots + B_{rk}C_r \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

где C_1, C_2, \dots, C_r обозначают r произвольных постоянных и

$$\left. \begin{array}{c} B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ B_{r1}, B_{r2}, \dots, B_{rn} \end{array} \right\} \quad (14)$$

— любые r линейно независимых³⁾ решений рассматриваемой системы.

Это показывает, что всякому собственному значению λ_0 кратности $r = n - p$ соответствует решение однородного уравнения (9) вида

$$\varphi_0(x) = C_1\varphi_{01}(x) + C_2\varphi_{02}(x) + \dots + C_r\varphi_{0r}(x), \quad (15)$$

где C_1, C_2, \dots, C_r — r произвольных постоянных, а

$$\varphi_{01}(x), \varphi_{02}(x), \dots, \varphi_{0r}(x)$$

¹⁾ См. Приложение I и Трикоми [46] или Schreier O., Sperner E., Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory, New York, 1951. [См. также Курош А. Г., Курс высшей алгебры, М., 1955.—Прим. перев.]

²⁾ Ранг определителя (или матрицы) есть максимальный порядок его не равных нулю миноров. Следовательно, если ранг равен p , то это означает, что существует по крайней мере один не равный нулю минор порядка p , но все миноры порядка $p+1$ или выше (если они существуют) равны нулю.

³⁾ Это означает, что если $\mu_1 B_{1k} + \mu_2 B_{2k} + \dots + \mu_r B_{rk} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то необходимо $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$.

— r линейно независимых функций¹⁾, которые выражаются через B_{hk} следующим образом:

$$\varphi_{0h}(x) = \sum_{k=1}^n B_{hk} X_k(x) \quad (h = 1, 2, \dots, r). \quad (16)$$

Больше того, мы можем предположить, что эти функции *нормированы*²⁾, т. е. что их *нормы* равны единице:

$$\int \varphi_{0h}^2(x) dx = 1 \quad (h = 1, 2, \dots, r). \quad (17)$$

Все эти собственные функции *аннулируются* оператором Фредгольма (2.1.14):

$$\mathcal{F}_x [\varphi_{0h}(y)] \equiv 0. \quad (18)$$

Используя элементарные преобразования определителя (7), можно убедиться³⁾, что *кратность* $r = n - p$ *собственного значения* никогда не превосходит его *кратности* m как *корня уравнения* $\mathcal{D}(\lambda) = 0$. В том *важном частном случае*, когда $a_{hk} = a_{kh}$, имеем

$$r = m.$$

Другим важным фактом является то, что данному ядру (1) и его *сопряженному* ядру

$$K(y, x) = \sum_{k=1}^n X_k(y) Y_k(x) \quad (19)$$

¹⁾ Линейная независимость функций φ_{0h} непосредственно вытекает из свойств решений (14).

²⁾ *Ненулевая* функция (8) всегда может быть *пронормирована* при помощи деления ее на квадратный корень из ее нормы N^2 , ибо если

$$\int f^2(x) dx = N^2,$$

то, очевидно,

$$\int [f(x)/N]^2 dx = 1.$$

³⁾ См., например, Трикоми [46] или Schreier O., Sperner E., Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory, New York, 1951. Эти преобразования определителя в основном совпадают с теми, которые будут нами использованы ниже (§ 2.5).

соответствует одна и та же функция $\mathcal{D}(\lambda)$ и, следовательно, *одни и те же собственные значения*, поскольку перемена мест X_k и Y_k влечет за собой замену a_{hk} на a_{kh} , т. е. замену строк определителя (7) его столбцами.

Однако собственными функциями сопряженного ядра, т. е. нетривиальными решениями *сопряженного однородного уравнения*

$$\psi(x) - \lambda \int K(y, x) \psi(y) dy = 0 \quad (20)$$

при $\lambda = \lambda_0$ будут *не* предыдущие функции (16), а функции

$$\psi_{0h}(x) = \sum_{k=1}^n B_{hk}^* Y_k(x) \quad (h = 1, 2, \dots, r), \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} B_{11}^*, B_{12}^*, \dots, B_{1n}^* \\ \dots\dots\dots \\ B_{r1}^*, B_{r2}^*, \dots, B_{rn}^* \end{array} \right\} \quad (22)$$

— любые r линейно независимых решений *сопряженной* однородной системы

$$\left. \begin{array}{l} (1 - \lambda a_{11}) \xi_1 - \lambda a_{21} \xi_2 - \dots - \lambda a_{n1} \xi_n = 0, \\ -\lambda a_{12} \xi_1 + (1 - \lambda a_{22}) \xi_2 - \dots - \lambda a_{n2} \xi_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\lambda a_{1n} \xi_1 - \lambda a_{2n} \xi_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn}) \xi_n = 0. \end{array} \right\} \quad (23)$$

Любая собственная функция $\varphi_{0h}(x)$, соответствующая собственному значению λ_0 , *ортogonalна* на основном интервале $(0,1)$ любой *сопряженной* собственной функции $\psi_{1k}(x)$, соответствующей *отличному* от λ_0 собственному значению λ_1 ¹⁾.

¹⁾ Вообще, две функции $g(x)$ и $f(x)$ называются ортогональными на интервале (a, b) , если

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} I &= \int \varphi_{0h}(x) \psi_{1h}(x) dx = \lambda_0 \int \psi_{1h}(x) dx \int K(x, y) \varphi_{0h}(y) dy = \\ &= \lambda_0 \int \varphi_{0h}(y) dy \int K(x, y) \psi_{1h}(x) dx = \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \int \varphi_{0h}(y) \psi_{1h}(y) dy = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} I, \end{aligned}$$

а это равенство возможно только тогда, когда либо $\lambda_0 = \lambda_1$, либо $I = 0$.

Вернемся теперь к неоднородному уравнению (3) в случае, когда $\mathcal{D}(\lambda) = 0$. Мы докажем, что при $\lambda = \lambda_0$ неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполняются r условий ортогональности

$$(f, \psi_{0h}) \equiv \int f(x) \psi_{0h}(x) dx = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r). \quad (24)$$

В этом случае неоднородное уравнение имеет ∞^r решений вида

$$\varphi(x) = \Phi(x) + C_1 \varphi_{01}(x) + C_2 \varphi_{02}(x) + \dots + C_r \varphi_{0r}(x), \quad (25)$$

где $\Phi(x)$ — соответствующим образом выбранная линейная комбинация функций $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x)$.

Действительно, условия (24) необходимы. Если уравнение (3) при $\lambda = \lambda_0$ имеет некоторое решение $\Phi(x)$, то из самого уравнения вытекает, что

$$\begin{aligned} \int f(x) \psi_{0h}(x) dx &= \\ &= \int \Phi(x) \psi_{0h}(x) dx - \lambda_0 \int \psi_{0h}(x) dx \int K(x, y) \Phi(y) dy = \\ &= \int \Phi(x) \psi_{0h}(x) dx - \lambda_0 \int \Phi(y) dy \int K(x, y) \psi_{0h}(x) dx. \end{aligned}$$

Однако в силу того, что λ_0 и $\psi_{0h}(x)$ являются собственным значением и соответствующей собственной функцией сопряженного ядра, имеем

$$\lambda_0 \int K(x, y) \psi_{0h}(x) dx = \psi_{0h}(y),$$

откуда

$$\int f(x) \psi_{0h}(x) dx = 0.$$

Далее, условия (24) достаточны, поскольку из них легко следует, что неоднородная система (6), которую сокращенно можно записать в виде

$$\Xi_1 = b_1, \quad \Xi_2 = b_2, \quad \dots, \quad \Xi_n = b_n,$$

приводится лишь к $n - r$ независимым уравнениям. Следовательно, мы можем легко решить ее (перенеся r неизвестных в правую часть), поскольку ранг p матрицы коэффициентов в точности равен $n - r$.

Это приведение осуществимо в силу следующих соображений. Умножим предыдущие уравнения на B_{h1}^* , B_{h2}^* , ..., B_{hr}^* соответственно и сложим. Вспоминая уравнения (23), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n B_{hk}^* \Xi_k &= [(1 - \lambda a_{11}) B_{h1}^* - \lambda a_{21} B_{h2}^* - \dots - \lambda a_{n1} B_{hn}^*] \xi_1 + \\ &+ [-\lambda a_{12} B_{h1}^* + (1 - \lambda a_{22}) B_{h2}^* - \dots - \lambda a_{n2} B_{hn}^*] \xi_2 + \\ &+ \dots \dots \dots + \\ &+ [-\lambda a_{1n} B_{h1}^* - \lambda a_{2n} B_{h2}^* - \dots + (1 - \lambda a_{nn}) B_{hn}^*] \xi_n \equiv 0; \end{aligned}$$

с другой стороны, в силу условий (24), имеют место равенства

$$\sum_{k=1}^n B_{hk}^* b_k = \int \left[\sum_{k=1}^n B_{hk}^* Y_k(x) \right] f(x) dx = \int \psi_{0h}(x) f(x) dx = 0.$$

Между прочим, представление решения в виде (25) иллюстрирует следующий очевидный факт: общее решение уравнения (3) в случае, когда $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, можно рассматривать как сумму произвольного частного решения $\Phi(x)$ и общего решения (15) однородного уравнения.

Таким образом, мы доказали для PG -ядер следующую основную теорему Фредгольма (она будет распространена на уравнения с ядром общего вида в следующем параграфе):

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

имеет, вообще говоря, одно и только одно решение класса

L_2 , определяемое формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int H(x, y; \lambda) f(y) dy,$$

где $H(x, y; \lambda)$ — резольвентное ядро; $H(x, y; \lambda)$ является аналитической функцией λ и при $|\lambda| < \|K\|^{-1}$ определяется рядом Неймана

$$-H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \dots,$$

где K_2, K_3, \dots — итерированные ядра. Единственным исключением являются особые точки функции $H(x, y; \lambda)$, которые совпадают¹⁾ с нулями аналитической функции $\mathcal{D}(\lambda)$ переменного λ (называемыми собственными значениями). В случае PG-ядра $\mathcal{D}(\lambda)$ представляет собой многочлен.

Если $\lambda = \lambda_0$ — корень уравнения $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ кратности $m \geq 1$, то однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

имеет r линейно независимых нетривиальных решений, называемых собственными функциями, число r — кратность собственного значения — удовлетворяет условию $1 \leq r \leq m$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно сопряженного однородного уравнения

$$\psi(x) - \lambda \int K(y, x) \psi(y) dy = 0.$$

Однако неоднородное уравнение при $\lambda = \lambda_0$ имеет решения (именно, ∞^r решений) тогда и только тогда, когда заданная функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям сопряженного однородного уравнения.

Отсюда как следствие немедленно вытекает очень важная

¹⁾ Если λ_0 — корень уравнения $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, то λ_0 является особой точкой функции $H(x, y; \lambda)$, даже если $\mathcal{D}(x, y; \lambda_0) = 0$, поскольку для каждого собственного значения однородное уравнение имеет по крайней мере ∞^1 (если $p = n - 1$) нетривиальных решений, тогда как (см. § 2.1) в каждой регулярной точке функции $H(x, y; \lambda)$ это уравнение имеет только одно решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Теорема об альтернативе. Если однородное интегральное уравнение Фредгольма имеет только тривиальное решение, то соответствующее неоднородное уравнение всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородное уравнение имеет некоторое нетривиальное решение, то неоднородное интегральное уравнение либо вовсе не имеет решения, либо имеет бесконечное число решений в зависимости от заданной функции $f(x)$.

Однако даже это следствие доказано пока только для PG -ядер.

Заметим, наконец, что результаты этого параграфа остаются по существу справедливыми и для случая, когда $X_k(x)$, $Y_k(y)$ и $f(x)$ (аналитически) зависят от параметра λ , т. е. для уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int \left[\sum_{k=1}^n X_k(x, \lambda) Y_k(y, \lambda) \right] \varphi(y) dy = f(x, \lambda). \quad (26)$$

В этом случае a_{hk} и b_n становятся аналитическими функциями λ , а $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$ представляют собой уже не многочлены относительно λ , а аналитические функции λ более общей природы. Следовательно, может даже оказаться, что собственных значений вовсе не существует, поскольку неалгебраическая аналитическая функция может не иметь нулей.

2.4. Теорема Фредгольма для ядер общего вида

Используя метод Э. Шмидта, вновь открытый и обобщенный Пиконе¹⁾, мы распространим теперь основную теорему Фредгольма на L_2 -ядра общего вида, т. е. на ядра, удовлетворяющие только немногим условиям § 2.1. Для этого мы заметим сначала, что каждое L_2 -ядро $K(x, y)$ может быть разложено (и притом бесчисленным множеством способов) на сумму соответствующим образом подобранного PG -ядра $S(x, y)$ и другого L_2 -ядра $T(x, y)$, норма $\|T\|$ которого может быть сделана как угодно малой. Это будет доказано в следующей главе (§ 3.6), разумеется, без ссылки на теорему Фредгольма. Мы предполо-

¹⁾ Пиконе [37], гл. VII, стр. 582 и след.

жим, что все точки λ -плоскости, которые мы будем рассматривать, лежат в круге $|\lambda| < R$ (где R — произвольная положительная постоянная), и положим

$$K(x, y) = S(x, y) + T(x, y), \quad (1)$$

где

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y), \quad \|T\|^2 = \iint T^2(x, y) dx dy < \frac{1}{R^2}. \quad (2)$$

Последнее неравенство обеспечивает выполнение условия (2.1.9), а значит, и сходимость ряда Неймана для ядра T .

Следовательно, если мы обозначим через $H_T(x, y; \lambda)$ резольвентное ядро, соответствующее ядру $T(x, y)$, то, поскольку наше основное уравнение можно записать в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int T(x, y) \varphi(y) dy = F(x),$$

где

$$F(x) = f(x) + \lambda \int S(x, y) \varphi(y) dy,$$

мы можем заменить его эквивалентным уравнением

$$\varphi(x) = F(x) - \lambda \int H_T(x, y; \lambda) F(y) dy,$$

т. е. уравнением

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int \left[S(x, y) - \lambda \int H_T(x, z; \lambda) S(z, y) dz \right] \varphi(y) dy = \\ = f(x) - \lambda \int H_T(x, y; \lambda) f(y) dy; \end{aligned}$$

но последнее уравнение может быть записано следующим образом:

$$\varphi(x) - \lambda \int \left[\sum_{k=1}^n X_k^*(x, \lambda) Y_k(y) \right] \varphi(y) dy = f^*(x, \lambda), \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X_k^*(x, \lambda) &= X_k(x) - \lambda \int H_T(x, y; \lambda) X_k(y) dy, \\ f^*(x, \lambda) &= f(x) - \lambda \int H_T(x, y; \lambda) f(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, любое уравнение Фредгольма второго рода с произвольным L_2 -ядром может быть сведено к аналогичному уравнению с PG -ядром, или, более точно, к уравнению вида (2.3.26). Однако для таких уравнений основная теорема Фредгольма из предыдущего параграфа имеет место; следовательно, эта теорема имеет место и для интегрального уравнения Фредгольма второго рода с произвольным L_2 -ядром.

Больше того, отсюда непосредственно видно, что *спектр* (т. е. множество собственных значений) интегрального уравнения Фредгольма второго рода с произвольным L_2 -ядром не имеет предельных точек, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

В самом деле, собственные значения внутри *любого* круга $|\lambda| \leq R$ совпадают с нулями аналитической функции $\mathcal{D}_R(\lambda)$ — определителя (2.3.7) для уравнения (3), — которая заведомо регулярна при $|\lambda| \leq R$.

2.5. Формулы Фредгольма

В дополнение к предыдущим результатам мы приведем еще (не только по соображениям исторического характера) знаменитые *формулы Фредгольма*, дающие явное представление резольвентного ядра H интегрального уравнения второго рода с ограниченным¹⁾ ядром K . Это резольвентное ядро будет представлено как частное двух *всюду сходящихся* степенных рядов относительно λ , аналогично случаю PG -ядер, когда соответствующее резольвентное ядро является частным двух *многочленов* относительно λ [см. (2.3.12)].

Формулы Фредгольма могут быть получены весьма простым и изящным способом, поскольку мы можем избежать некоторых довольно трудных рассуждений, неизбежно возникающих в том случае, когда основная теорема Фредгольма еще не доказана, а должна быть получена из этих формул.

¹⁾ Михлин [см. Михлин С. Г., О сходимости рядов Фредгольма, ДАН СССР, 42 (1944), 373—376] доказал сходимость рядов Фредгольма даже в предположении, что ядро K только принадлежит классу L_2 .

Основная идея метода Фредгольма состоит в эвристическом построении некоторой функции $\mathcal{D}(\lambda)$, играющей ту же роль, что и функция $\mathcal{D}(\lambda)$ из § 2.3. После этого нужно только строго доказать, что как эта функция, так и произведение

$$\mathcal{D}(x, y; \lambda) = \mathcal{D}(\lambda) H(x, y; \lambda) \quad (1)$$

являются *целыми* функциями λ . Мы представим их изящными разложениями в степенные ряды.

Для построения $\mathcal{D}(\lambda)$ мы сначала предположим, что заданное ограниченное ядро $K(x, y)$ может быть приближенно представлено *кусочно-постоянной функцией* (подобно рассмотренной в § 1.2)

$$K(x, y) = K\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) = k_{rs}, \quad \begin{cases} \frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n} & (n=1, 2, 3, \dots), \\ \frac{s-1}{n} < y \leq \frac{s}{n} & (r, s=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

После этого (не вдаваясь в слишком подробные объяснения) мы «вычислим» предел при $n \rightarrow \infty$ определителя соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (1.2.1").

Сначала мы воспользуемся хорошо известной теоремой об определителях, строка (или столбец) которых является суммой двух слагаемых. В силу этой теоремы упомянутый выше определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{n} k_{11} & 0 - \frac{\lambda}{n} k_{12} & \dots & 0 - \frac{\lambda}{n} k_{1n} \\ 0 - \frac{\lambda}{n} k_{21} & 1 - \frac{\lambda}{n} k_{22} & \dots & 0 - \frac{\lambda}{n} k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 - \frac{\lambda}{n} k_{n1} & 0 - \frac{\lambda}{n} k_{n2} & \dots & 1 - \frac{\lambda}{n} k_{nn} \end{vmatrix}$$

может быть представлен в виде

$$D_n = 1 - \frac{\lambda}{n} S_1 + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 S_2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n S_n. \quad (2)$$

Здесь S_m ($m=1, 2, \dots, n$) обозначает сумму всех *главных миноров* порядка m , содержащихся в определителе с элементами k_{rs} , т. е. всех C_n^m миноров, образованных из всевозможных m строк этого определителя и m столбцов

с теми же номерами. Иными словами, мы полагаем

$$S_m = \sum \begin{vmatrix} k_{r_1 r_1} & k_{r_1 r_2} & \dots & k_{r_1 r_m} \\ k_{r_2 r_1} & k_{r_2 r_2} & \dots & k_{r_2 r_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{r_m r_1} & k_{r_m r_2} & \dots & k_{r_m r_m} \end{vmatrix},$$

где последовательность r_1, r_2, \dots, r_m обозначает любую комбинацию m чисел (из n чисел $1, 2, \dots, n$), расположенных в порядке возрастания. Далее, принимая во внимание, что любая перестановка индексов r_1, r_2, \dots, r_m оставляет предыдущий минор (даже со знаком) без изменений¹⁾ и что каждый минор с двумя или большим числом одинаковых индексов равен нулю, мы можем заставить индексы r_1, r_2, \dots, r_m пробегать (независимо друг от друга) все значения от 1 до n и компенсировать $(m!)$ -кратное повторение каждого прежнего члена, разделив минор на $m!$. Поэтому мы можем написать

$$S_m = \frac{1}{m!} \sum_{r_1=1}^n \sum_{r_2=1}^n \dots \sum_{r_m=1}^n \begin{vmatrix} K\left(\frac{r_1}{n}, \frac{r_1}{n}\right) & \dots & K\left(\frac{r_1}{n}, \frac{r_m}{n}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ K\left(\frac{r_m}{n}, \frac{r_1}{n}\right) & \dots & K\left(\frac{r_m}{n}, \frac{r_m}{n}\right) \end{vmatrix},$$

или более кратко

$$S_m = \frac{1}{m!} \sum_{r_1, \dots, r_m=1}^n K\left(\frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \dots, \frac{r_m}{n}\right), \quad (3)$$

где²⁾

$$\begin{aligned} & K\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_m}{y_m}\right) = \\ & = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \dots & K(x_1, y_m) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \dots & K(x_2, y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_m, y_1) & K(x_m, y_2) & \dots & K(x_m, y_m) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾ Поскольку и строки и столбцы подвергаются одной и той же перестановке.

²⁾ Хотя в данный момент введение двух строк переменных в символе $K(\dots)$ может показаться излишним, оно будет полезным впоследствии.

Но, если отбросить делитель $m!$, то сумму (3), умноженную на $(1/n)^m$, можно рассматривать как приближенную сумму для m -кратного (риманова) интеграла

$$\iint \dots \int K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m$$

[интегралы берутся по интервалу $(0,1)$]; следовательно, «пределом» выражения (2) при $n \rightarrow \infty$ является изящный степенной ряд

$$\mathcal{D}(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m. \quad (5)$$

Это и есть основная функция Фредгольма $\mathcal{D}(\lambda)$.

Оставляя в стороне «поэтические вольности», мы докажем теперь при помощи теоремы Адамара (см. приложение II), что бесконечный ряд (5) *всюду сходится*, т. е. что $\mathcal{D}(\lambda)$ является *целой функцией* λ . При этом мы будем предполагать, что заданное ядро $K(x, y)$ ограничено:

$$|K(x, y)| \leq N, \quad (6)$$

и, разумеется, интегрируемо.

В самом деле, из теоремы Адамара и неравенства (6) вытекает, что

$$\left| \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m \right| \leq \\ \leq \left| K \left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_m \\ \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) \right| \leq N^m m^{m/2}.$$

Следовательно, ряд (5) имеет мажоранту

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{m/2}}{m!} (|\lambda| N)^m;$$

последний ряд всюду сходится, поскольку степенной ряд

$$\Omega(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m, \quad a_m = \frac{m^{m/2}}{m!} \quad (6')$$

имеет бесконечно большой радиус сходимости ¹⁾:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{a_{m+1}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{m/2}}{(m+1)^{m/2}} \frac{m+1}{\sqrt{m+1}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m+1} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{-1/2} = \infty. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к функции $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$, определенной формулой (1), и заметим, что при $|\lambda| < N^{-1}$ имеем

$$\mathcal{D}(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y) \frac{(-\lambda)^n}{n!}, \quad (7)$$

где $C_n(x, y)$ — некоторые соответствующим образом подобранные коэффициенты. Чтобы определить эти коэффициенты, воспользуемся уравнениями (2.1.10) для резольвентного ядра, которым мы придадим теперь форму

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\lambda) K(x, y) + \mathcal{D}(x, y; \lambda) &= \lambda \int K(x, z) \mathcal{D}(z, y; \lambda) dz = \\ &= \lambda \int \mathcal{D}(x, z; \lambda) K(z, y) dz, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку

$$H(x, y; \lambda) = \frac{\mathcal{D}(x, y; \lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}. \quad (9)$$

Обозначив через I_m коэффициент при члене $(-\lambda)^m/m!$ ряда (5), получим отсюда рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} I_m K(x, y) + C_m(x, y) + m \int K(x, z) C_{m-1}(z, y) dz &= 0 \quad (10) \\ (m = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

которая вместе с очевидной формулой

$$C_0(x, y) = \mathcal{D}(0) H(x, y; 0) = -K(x, y) \quad (11)$$

потенциально определяет все $C_m(x, y)$.

Рассмотрим теперь m -кратный интеграл

$$C_m^*(x, y) = \int \int \dots \int K \left(\begin{matrix} x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m.$$

¹⁾ Надо вспомнить, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$.

Разлагая определитель по элементам его первой строки, получаем

$$\begin{aligned}
 C_m^* &= \iint \dots \int \left\{ K(x, y) K \begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_m \\ \xi_1, \dots, \xi_m \end{pmatrix} + \right. \\
 &+ \sum_{k=1}^m (-1)^k K(x, \xi_k) K \begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_m \end{pmatrix} \left. \right\} \times \\
 &\times d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m = I_m K(x, y) - \sum_{k=1}^m \int K(x, \xi_k) d\xi_k \times \\
 &\times \iint \dots \int K \begin{pmatrix} \xi_k, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_m \end{pmatrix} \times \\
 &\times d\xi_1 \dots d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} \dots d\xi_m = \\
 &= I_m K(x, y) - \sum_{k=1}^m \int K(x, \xi_k) C_{m-1}^*(\xi_k, y) d\xi_k.
 \end{aligned}$$

Однако последний интеграл не зависит от k , поскольку переменную интегрирования можно обозначить не ξ_k , а z , причем значение интеграла не изменится, следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned}
 C_m^*(x, y) &= I_m K(x, y) - m \int K(x, z) C_{m-1}^*(z, y) dz \\
 &\quad (m = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Далее, мы также имеем

$$C_0^*(x, y) = K(x, y),$$

так что, сравнивая полученные формулы с (10) и (11), видим, что $C_m(x, y) = -C_m^*(x, y)$.

Иными словами, мы нашли, что по крайней мере при $|\lambda| < N^{-1}$ функция $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$ допускает разложение в степенной ряд

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(x, y; \lambda) &= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \times \\
 &\times \iint \dots \int K \begin{pmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m, \quad (12)
 \end{aligned}$$

вполне аналогичное разложению (5).

Однако это разложение справедливо не только при $|\lambda| < N^{-1}$, но и при *любом* λ , т. е. $\mathcal{L}(x, y; \lambda)$ также является *целой* функцией λ , поскольку ряд (12) также имеет *бесконечно большой* радиус сходимости. Это можно непосредственно проверить, используя еще раз теорему Адамара, поскольку

$$\left| \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m \right| \leq \\ \leq \left| K \left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) \right| \leq N^{m+1} (m+1)^{(m+1)/2}.$$

Следовательно, ряд (12) имеет мажоранту

$$N \sum_{m=0}^{\infty} a'_m (|\lambda| N)^m, \text{ где } a'_m = \frac{1}{m!} (m+1)^{(m+1)/2};$$

но

$$\varrho_m = \frac{a'_m}{a'_{m+1}} = \sqrt{m+1} \sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \left[\left(1 + \frac{1}{m+1} \right)^{m+1} \right]^{-1/2};$$

поэтому предел ϱ_m при $m \rightarrow \infty$ *бесконечен*, и т. д.

Формулы Фредгольма (5) и (12) дают нам выражение для резольвентного ядра $H(x, y; \lambda)$ на всей λ -плоскости в изящной форме (9), из которой следует, что это резольвентное ядро представляет собой *мероморфную* функцию от λ^1). Кроме того, согласно формуле (9), для *любого* λ , *не являющегося собственным значением*, единственное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода может быть представлено в виде

$$\Phi(x) \equiv f(x) - \frac{\lambda}{\mathcal{D}(\lambda)} \int \mathcal{D}(x, y; \lambda) f(y) dy. \quad (13)$$

Единственное неудобство состоит в том, что бесконечные ряды (5) и (12), несмотря на их хорошую сходимость, слишком сложны для численных расчетов из-за входящих в большинство членов кратных интегралов. Однако суще-

¹⁾ Мероморфная функция есть частное двух *целых* аналитических функций. В любой конечной части комплексной плоскости она имеет только полюсы, следовательно, она имеет только конечное число полюсов в любой конечной части λ -плоскости.

ствуют другие методы численных расчетов, и мы вскоре коротко остановимся на них (§ 2.6).

Между прочим, из формул Фредгольма можно вывести простые и интересные соотношения между производными по λ от $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$. Именно, поскольку почленное дифференцирование допустимо, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(n)}(x, y; \lambda) &\equiv \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \mathcal{D}(x, y; \lambda) = \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{m-n}}{(m-n)!} \times \\ &\quad \times \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m;\end{aligned}$$

следовательно, при $x = y$ имеем

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}^{(n)}(x, x; \lambda) dx &= (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{m-n}}{(m-n)!} \times \\ &\quad \times \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ x, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) dx d\xi_1 \dots d\xi_m.\end{aligned}\quad (14)$$

С другой стороны, формулу (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\lambda) &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{m+1}}{(m+1)!} \times \\ &\quad \times \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m \\ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_m,\end{aligned}$$

так что, дифференцируя $(n+1)$ раз по λ , находим

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(n+1)}(\lambda) &= (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{m-n}}{(m-n)!} \times \\ &\quad \times \iint \dots \int K \left(\begin{matrix} \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \\ \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \end{matrix} \right) d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_m.\end{aligned}\quad (15)$$

Правые части равенств (14) и (15) отличаются друг от друга только первой переменной интегрирования, следовательно,

$$\mathcal{D}^{(n+1)}(\lambda) = \int \mathcal{D}^{(n)}(x, x; \lambda) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

В частности, при $n = 0$ и $|\lambda| < N^{-1}$ имеем

$$\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \int H(x, x; \lambda) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int K_n(x, x) dx.$$

Если положить ¹⁾

$$\int K_n(x, x) dx = A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (17)$$

то отсюда получается простое и важное разложение *логарифмической производной* функции $\mathcal{D}(\lambda)$ в степенной ряд

$$\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = - \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \lambda^n, \quad (18)$$

радиус сходимости которого очевидно совпадает с минимальным расстоянием от собственных значений до начала координат.

Между прочим, этими разложениями можно воспользоваться для доказательства того, что *интегральное уравнение Вольтерра не имеет собственных значений*, как это было в неявной форме получено в § 1.5.

В самом деле, если

$$K(x, y) \equiv 0 \quad \text{при } y > x,$$

то и

$$K_n(x, y) \equiv 0 \quad \text{при } y > x, \quad n = 2, 3, \dots,$$

и, следовательно,

$$K(x, z) K_n(z, x) \equiv 0 \quad (x \neq z, \quad n = 1, 2, 3, \dots).$$

Но это показывает, что $A_2 = A_3 = \dots = 0$, поэтому

$$\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = -A_1;$$

принимая во внимание, что $\mathcal{D}(0) = 1$, имеем

$$\mathcal{D}(\lambda) = e^{-A_1 \lambda}. \quad (18')$$

Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае не существует собственных значений.

¹⁾ Постоянные A_n часто называют *следами* ядра $K(x, y)$.

Другим важным следствием из предыдущих формул Фредгольма является возможность явного построения собственных функций, соответствующих собственному значению λ_0 кратности $r = 1$, для которого функция $\mathcal{D}(x, y; \lambda_0)$ не обращается в нуль тождественно¹⁾. В самом деле, первое из уравнений (8), которое в случае $\lambda = \lambda_0$ принимает вид

$$\mathcal{D}(x, y; \lambda_0) - \lambda_0 \int K(x, z) \mathcal{D}(z, y; \lambda_0) dz = 0,$$

показывает, что собственной функцией, соответствующей λ_0 , является функция

$$\varphi_0(x) = C \mathcal{D}(x, y_0; \lambda_0), \quad (19)$$

где C и y_0 — две произвольные постоянные. Но мы уже знаем, что все собственные функции должны содержаться в семействе вида (2.3.15) при $r = 1$; следовательно, при изменении y_0 функция $\mathcal{D}(x, y_0; \lambda_0)$ только умножается на не зависящей от x множитель. Иными словами, должно быть

$$\frac{\mathcal{D}(x, y_0; \lambda_0)}{\mathcal{D}(x, y_1; \lambda_0)} = \text{const}, \quad (20)$$

а это показывает, что $\mathcal{D}(x, y; \lambda_0)$ необходимо имеет вид

$$\mathcal{D}(x, y; \lambda_0) = F(x) G(y). \quad (21)$$

Если собственное значение λ_0 имеет кратность $r > 1$, то $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$ тождественно обращается в нуль, и для $k < r$ это справедливо также относительно более общей целой функции

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; \lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \times \\ &\times \iint \dots \int K\left(\begin{matrix} x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y_1, \dots, y_k, \xi_1, \dots, \xi_m \end{matrix}\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m, \end{aligned} \quad (22)$$

¹⁾ Если кратность m числа λ_0 как корня уравнения $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ равна единице; т. е. если $\mathcal{D}'(\lambda_0) \neq 0$, это условие есть непосредственное следствие формулы (16) при $n = 1$, поскольку тождественное обращение в нуль $\mathcal{D}(x, y; \lambda_0)$ влечет за собой $\mathcal{D}'(\lambda_0) = 0$; однако если $r = 1$, $m > 1$, то доказательство требует рассмотрения функций $\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; \lambda)$, определяемых формулой (22).

которая является обобщением предыдущей функции $\mathcal{D}(x, y; \lambda)$. В этом случае функция $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r; \lambda)$, соответствующая $k=r$, не обращается в нуль тождественно и порождает r линейно независимых собственных функций

$$\varphi_{0h}(x) \equiv \mathcal{D}(x_1^0, \dots, x_{h-1}^0, x, x_{h+1}^0, \dots, x_r^0; y_1^0, \dots, y_r^0; \lambda_0) \\ (h = 1, 2, \dots, r). \quad (23)$$

Относительно дальнейших подробностей см., например, Ловитт [29].

Наконец, заметим, что, как и в случае интегрального уравнения Вольтерра (§ 1.12), уравнение Фредгольма второго рода может быть непосредственно сведено к уравнению

$$\varphi(x) - \lambda^n \int K_n(x, y) \varphi(y) dy = f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

с итерированным ядром $K_n(x, y)$, где

$$f_1(x) \equiv f(x), \quad f_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int K(x, y) f_n(y) dy \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Это преобразование показывает также, что если λ_0 является собственным значением, соответствующим собственной функции $\varphi_0(x)$ ядра $K(x, y)$, то $\varphi_0(x)$ является также собственной функцией итерированного ядра $K_n(x, y)$, а λ_0^n — соответствующим собственным значением.

Чтобы доказать утверждение, обратное этой теореме, мы заметим сначала, что если $H_n(x, y; \lambda)$ — резольвентное ядро, соответствующее итерированному ядру $K_n(x, y)$, то следующие два разложения в степенные ряды:

$$-\lambda H(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y) + \dots, \\ -\lambda^n H_n(x, y; \lambda^n) = \lambda^n K_n(x, y) + \lambda^{2n} K_{2n}(x, y) + \dots$$

аналогичны разложениям двух функций $f(z)$ и $f_{m,1}(z)$ из § 1.9¹⁾. Следовательно, в силу (1.9.18), обязательно существует n постоянных $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (зависящих только от комплексных корней из единицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$), таких,

¹⁾ Заменить m на n и положить $a_0 = 0$.

что соотношение

$$\lambda^{n-1}H_n(x, y; \lambda^n) = \eta_1 H(x, y; \varepsilon_1 \lambda) + \\ + \eta_2 H(x, y; \varepsilon_2 \lambda) + \dots + \eta_n H(x, y; \varepsilon_n \lambda) \quad (25)$$

выполняется тождественно.

Однако тождество (25) показывает, что точка $\mu = \mu_0$ является особой точкой функции $H_n(x, y; \mu)$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из n точек

$$\varepsilon_1 \sqrt[n]{\mu_0}, \varepsilon_2 \sqrt[n]{\mu_0}, \dots, \varepsilon_n \sqrt[n]{\mu_0},$$

где $\sqrt[n]{\mu_0}$ обозначает некоторый фиксированный корень n -й степени из μ_0 , является особой точкой функции $H(x, y; \lambda)$. Поэтому

Если μ_0 — собственное значение итерированного ядра $K_n(x, y)$, то по крайней мере один из n комплексных корней n -й степени из μ_0 является собственным значением исходного ядра $K(x, y)$.

В частности, для $n=2$ из тождества (25) получаем

$$H_2(x, y; \lambda^2) = \frac{1}{2\lambda} [H(x, y; \lambda) - H(x, y; -\lambda)]. \quad (26)$$

2.6. Численное решение интегральных уравнений

Как мы уже заметили, формулы Фредгольма мало пригодны для численного решения интегральных уравнений. Однако во многих случаях ядро можно приблизить соответствующим PG -ядром или кусочно-постоянной функцией, тогда, как мы уже видели, интегральное уравнение может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений.

При использовании PG -ядра наиболее важным шагом является целесообразный выбор функций $X_k(x)$ и $Y_k(y)$, при котором небольшое число членов обеспечивает хорошее приближение — иногда достаточно всего двух или трех членов. К сожалению, существует очень небольшое число общих правил, облегчающих этот выбор. Например, если ядро $K(x, y)$ тождественно обращается в нуль для некоторых исключительных значений x или y , весьма полезно, чтобы функции $X_k(x)$ или $Y_k(y)$ в этих точках обраща-

лись в нуль. Во всяком случае, при изучении *ортogonalных систем* в следующей главе (см. § 3.6) мы укажем общий метод нахождения бесконечного множества PG -ядер, приближающих L_2 -ядро «в среднем».

Если же используется кусочно-постоянная функция (т. е. если интеграл в данном интегральном уравнении заменяется соответствующей конечной суммой), то вместо деления основного интервала на равные подинтервалы, как в § 1.2, может оказаться полезным разбиение интервала при помощи нулей некоторого многочлена Лежандра. Этот метод применялся Гауссом для численного интегрирования и был развит Нистрёмом¹⁾.

В обоих случаях, если данное ядро $K(x, y)$ приближается другим ядром $K^*(x, y)$ с известной максимальной погрешностью (в каждой точке)

$$|K(x, y) - K^*(x, y)| < \varepsilon, \quad (1)$$

может оказаться полезной оценка сверху максимальной погрешности $|\varphi(x) - \varphi^*(x)|$ для соответствующих решений интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Много лет назад мною было дано²⁾ явное выражение для этой оценки

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| < \varepsilon |\lambda| \frac{\Omega(L) \Omega'(L) + L [\Omega'^2(L) + \Omega(L) \Omega''(L)]}{|\mathcal{D}^*(\lambda)| [|\mathcal{D}^*(\lambda)| - \varepsilon |\lambda| \Omega'(L)]} \max |f(x)|, \quad (2)$$

где Ω — функция (2.5.6'), $\mathcal{D}^*(\lambda)$ — функция Фредгольма (2.5.5) для *приближающего ядра* $K^*(x, y)$ и

$$L = |\lambda| [\max |K(x, y)| + \varepsilon]. \quad (3)$$

Можно даже заменить функцию $\Omega(z)$ и ее производные соответствующими производными элементарной функции

$$\Omega_0(z) = (1 + z) \exp\left(\frac{1}{2} e z^2\right), \quad (4)$$

мажорирующей (в смысле Коши) функцию $\Omega(z)$.

¹⁾ Nyström E. J., Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen, *Comm. Phys. Math. Soc. Sci. Fenn.*, IV, 15 und V, 5; *Acta Math.*, 56 (1931).

²⁾ Tricomi F., Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm, *Rend. Accad. Lincei* (5), 33 (1), (1924), 483—486; 33 (II), (1924), 26—30.

Другой способ численного решения интегральных уравнений Фредгольма доставляет метод Энскога, который мы изучим в следующей главе (§ 3. 7), поскольку он тесно связан с теорией ортогональных функций.

Кроме того, К. Ланцош¹⁾ недавно развил метод «минимизированных итераций», который в ряде случаев дает, по-видимому, очень хорошие численные результаты. Этот метод можно рассматривать как применение подходящего процесса суммирования к ряду Неймана (2.1.5). При этом ряд Неймана заменяется другим рядом, сумма которого совпадает с суммой исходного ряда, если последний сходится; однако этот ряд в некоторых случаях остается сходящимся даже тогда, когда ряд Неймана расходится²⁾.

2.7. Решение задачи Дирихле методом Фредгольма

Наиболее важным «теоретическим» применением теории интегральных уравнений является получение *теорем существования* из соответствующих *теорем единственности*; вообще говоря, последние доказываются легче.

В самом деле, если задача, касающаяся некоторой функции φ , может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с L_2 -ядром, то *теорема об альтернативе* из § 2.3 обеспечивает существование этой функции в предположении, что λ не является собственным значением, т. е. в предположении, что соответствующее однородное уравнение имеет только решение $\varphi(x) \equiv 0$; иными словами, в предположении, что для нашей задачи справедлива *теорема единственности*.

Этот общий принцип является ключом к знаменитому решению Фредгольмом (1900 г.) задачи Дирихле; это решение впервые привлекло внимание математического мира к теории интегральных уравнений.

В своей простейшей форме задача Дирихле состоит в определении *гармонической функции* $u(x, y)$ двух переменных внутри заданной двумерной области D ; значения

¹⁾ Lanclos C., An iteration method for the solution of eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J. Research, Nat. Bur. Standards*, 45 (1950), 255—282.

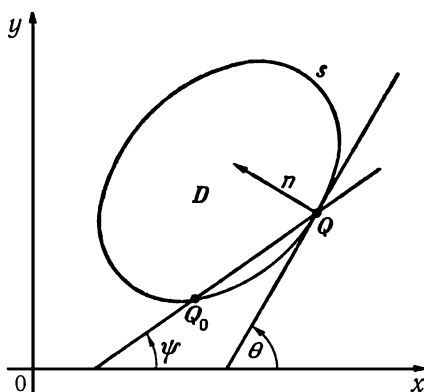
²⁾ См. также недавнюю книгу Г. Бюкнера [4].

u_s функции $u(x, y)$ на границе s области D заданы заранее. Гармоническая функция есть (по определению) решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

«регулярное» в замыкании области D .

Для простоты термин «регулярность» означает здесь непрерывность функции вместе с ее первыми и вторыми производными.



Р и с. 5.

Единственность решения задачи, т. е. тот факт, что $u \equiv 0$ во всей области D , если $u_s \equiv 0$ на границе, почти очевидна. В самом деле, это—непосредственное следствие элементарного равенства

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \oint_s u_s \frac{du}{dn} ds, \quad (2)$$

где du/dn обозначает производную от u по *внутренней нормали* к границе s ¹⁾.

Однако доказательство *существования* гармонической функции u представляет большие трудности, и до Фред-

¹⁾ Или, еще проще, мы можем использовать тот факт, что экстремальное значение гармонической функции достигается на границе.

гольма оно строго получено только для относительно узкого класса областей D .

Как мы уже объяснили, ключом к методу Фредгольма является сведение задачи об определении функции u к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. При этом нет необходимости фактически решать это уравнение, поскольку теорема об альтернативе и теорема единственности обеспечивают существование гармонической функции $u(x, y)$ при достаточно общих предположениях относительно границы s области D и заданных на ней значений u_s .

Не вдаваясь в подробности ¹⁾, мы рассмотрим здесь только основную схему сведения задачи Дирихле к интегральному уравнению, состоящую в том, что неизвестная функция u представляется в виде *логарифмического потенциала двойного слоя* с некоторой (неизвестной) плотностью $\mu(s)$ на границе s области D :

$$u(x, y) = - \int_0^l \mu(s) \frac{d \ln r}{dn} ds. \quad (3)$$

Здесь s —длина дуги граничной кривой (с произвольной точкой в качестве начала отсчета), l —общая длина граничной кривой, а

$$r = r(P, Q) = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}$$

—расстояние между произвольной точкой $P \equiv (x, y)$ области D и произвольной точкой $Q \equiv (x_s, y_s)$ граничной кривой

Хорошо известно следующее свойство потенциала двойного слоя: если точка P стремится к любой точке $Q_0 (s=s_0)$ границы *изнутри* области D , то имеет место соотношение

$$\lim_{P \rightarrow Q_0} u = - \int_0^l \mu(s) \frac{d}{dn} \ln r(Q_0, Q) ds + \pi \mu(s_0). \quad (4)$$

¹⁾ См., например, Ловитт [29] или Kellogg O. D., Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929, Ch. XI. [См. также Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1953, гл. IV.—Прим. перев.]

Следовательно, обозначив через $f(s)$ заданные значения u_s функции u на границе, мы должны иметь на этой кривой равенство

$$\mu(s_0) - \int_0^l \frac{d}{dn} \ln r(Q_0, Q) \mu(s) ds = f(s) \quad (0 \leq s \leq l),$$

которое представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\mu(s)$. Предположив, что $l=1$, введя обозначение

$$\frac{d}{dn} \ln r(Q_0, Q) = K(s_0, s) \quad (5)$$

и переменные x и y вместо s_0 и s соответственно, получим интегральное уравнение

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, y) \mu(y) dy = \frac{1}{\pi} f(x). \quad (6)$$

Учитывая, что потенциал двойного (как и потенциал простого) слоя тождественно равен нулю внутри D тогда и только тогда, когда соответствующая плотность μ тождественно обращается в нуль, мы можем без дальнейших дискуссий утверждать, что *задача Дирихле разрешима по крайней мере для тех областей D , границы которых приводят к непрерывному или по крайней мере интегрируемому с квадратом ядру* (5).

Предполагая, что граница области D представлена в параметрическом виде

$$x = \alpha(s), \quad y = \beta(s) \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (7)$$

где s снова обозначает длину дуги, легко получить формулу

$$\begin{aligned} -K(x, y) &= \frac{\sin(\theta - \psi)}{r(Q_0, Q)} = \frac{\partial}{\partial y} \arctg \frac{\beta(y) - \beta(x)}{\alpha(y) - \alpha(x)} = \\ &= \frac{[\alpha(y) - \alpha(x)] \beta'(y) - [\beta(y) - \beta(x)] \alpha'(x)}{[\alpha(y) - \alpha(x)]^2 + [\beta(y) - \beta(x)]^2}, \end{aligned}$$

где θ и ψ обозначают соответственно углы, образованные касательной к граничной кривой в точке Q и секущей Q_0Q с осью x . Однако если функции α и β по крайней мере

дважды дифференцируемы, то мы можем написать

$$\alpha(x) = \alpha(y) + (x-y)\alpha'(y) + \frac{1}{2}(x-y)^2[\alpha''(y) + \varepsilon_1],$$

$$\beta(x) = \beta(y) + (x-y)\beta'(y) + \frac{1}{2}(x-y)^2[\beta''(y) + \varepsilon_2],$$

где $\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = 0$ при $x \rightarrow y$; отсюда

$$\begin{aligned} [\alpha(y) - \alpha(x)]\beta'(y) - [\beta(y) - \beta(x)]\alpha'(y) = \\ = \frac{1}{2}[\gamma(y) + \varepsilon_2\alpha'(y) - \varepsilon_1\beta'(y)](x-y)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\alpha(y) - \alpha(x)]^2 + [\beta(y) - \beta(x)]^2 = \\ = \{1 + (x-y)[\varepsilon_1\alpha'(y) + \varepsilon_2\beta'(y)] + O[(x-y)^2]\}(x-y)^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(y)$ обозначает кривизну граничной кривой s в точке Q . Следовательно, мы имеем

$$-K(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\gamma(y) + \varepsilon_2\alpha'(y) - \varepsilon_1\beta'(y)}{1 + O(x-y)} \quad (8)$$

и, в частности,

$$\lim_{x \rightarrow y} K(x, y) = -\frac{1}{2}\gamma(y). \quad (9)$$

Отсюда вытекает, что задача Дирихле разрешима по крайней мере для любой области, граничная кривая которой в каждой точке имеет касательную и конечную кривизну.

Глава III

СИММЕТРИЧНЫЕ ЯДРА И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

3.1. Предварительные замечания и процесс ортогонализации

Для *симметричных ядер*, т. е. для ядер, которые удовлетворяют условию ¹⁾

$$K(x, y) = K(y, x), \quad (1)$$

собственные функции ψ_h сопряженного уравнения совпадают с собственными функциями φ_h исходного уравнения. Как следует из свойства ортогональности (§ 2.3), любая пара $\varphi_h(x)$, $\varphi_k(x)$ собственных функций симметричного ядра, соответствующих *различным* собственным значениям λ_h , λ_k , удовлетворяет условию ортогональности на основном интервале (a, b) ²⁾:

$$(\varphi_h, \varphi_k) \equiv \int_a^b \varphi_h(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (h \neq k). \quad (2)$$

В силу этой связи между симметричными ядрами и *ортогональными системами функций*, т. е. (конечными или бесконечными) системами L_2 -функций

$$\{\varphi_h\} \equiv \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \quad (3)$$

¹⁾ Мы будем рассматривать только *вещественные функции*, хотя большая часть наших рассуждений легко может быть распространена и на комплекснозначные функции. Заметим, однако, что аналогом симметричного ядра для комплекснозначных функций является *эрмитово ядро*, для которого $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, где черта означает комплексно сопряженное число ($\overline{z} = x - iy$, если $z = x + iy$).

²⁾ В этой главе мы будем рассматривать в качестве основного интервал (a, b) вместо $(0, 1)$, поскольку большая часть наших доказательств остается справедливой даже для бесконечного интервала (т. е. если $b = \infty$ или $a = -\infty$, или и $a = -\infty$, и $b = \infty$), если предполагать, что все интегралы сходятся.

удовлетворяющих условию (2)¹⁾, целесообразно начать изучение интегральных уравнений Фредгольма с симметричным ядром с краткого обзора основных фактов (§ 3.1 — 3.5) теории ортогональных функций²⁾.

На всем протяжении изложения мы будем считать, что каждая функция φ_h рассматриваемых ортогональных систем представляет собой L_2 -функцию, не почти всюду, обращаясь в нуль, т. е. что

$$\|\varphi_h\|^2 = \int_a^b \varphi_h^2(x) dx > 0. \quad (4)$$

Поэтому мы можем предположить, что наши функции не только ортогонализированы, но и *нормированы*, т. е. что

$$(\varphi_h, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & (h \neq k), \\ 1 & (h = k). \end{cases} \quad (5)$$

Такую систему мы будем называть *ортонормированной* или сокращенно *ОН-системой*.

Функции любой ортогональной системы (сокращенно *О-системы*) *линейно независимы*, ибо если существуют постоянные c_1, c_2, \dots, c_n , не равные одновременно нулю, и такие, что

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) \equiv 0 \quad (6)$$

почти всюду на основном интервале (a, b) , то, умножив тождество (6) на $\varphi_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) и проинтегрировав его по (a, b) , получим

$$c_h \int_a^b \varphi_h^2(x) dx = 0,$$

¹⁾ Мы можем обозначать функции ортогональной системы через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, поскольку при достаточно общих предположениях любая ортогональная система является либо *конечной* (т. е. содержит конечное число функций), либо *счетной*. См., например, Трикоми [47], стр. 23.

²⁾ Эта теория, включающая ряды Фурье и ортогональные многочлены, является одним из важнейших средств современного анализа. Хорошей книгой по *общей* теории является книга Качмажа и Штейнгауза [19]. В моей книге [48] кратко изложена (56 стр.) общая теория и более подробно — тригонометрические ряды и ортогональные многочлены.

Мы покажем сейчас, что коэффициенты k_{ns} ($s = 1, 2, \dots, n-1$) для n -й функции могут быть легко вычислены. В самом деле, из $n-1$ условий

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_n, \varphi_s) = k_{n1}(\varphi_1, \varphi_s) + k_{n2}(\varphi_2, \varphi_s) + \dots \\ &\dots + k_{nn-1}(\varphi_{n-1}, \varphi_s) + (\psi_n, \varphi_s) = k_{ns}(\varphi_s, \varphi_s) + (\psi_n, \varphi_s) \\ &\quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

получаем

$$k_{ns} = -\frac{(\psi_n, \varphi_s)}{(\varphi_s, \varphi_s)}. \quad (8)$$

Эта формула корректна: $(\varphi_s, \varphi_s) \neq 0$, поскольку φ_s есть линейная комбинация линейно независимых функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, и поэтому не может быть равной нулю почти всюду.

3.2. Приближение и сходимость в среднем

Рассмотрим некоторую ОН-систему функций $\{\varphi_h\}$ и «произвольную» функцию $f(x)$, определенную на основном интервале системы. Может ли функция $f(x)$ быть «представлена» в виде некоторой соответствующим образом выбранной линейной комбинации

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots \quad (1)$$

функций ОН-системы? Разумеется, ответ зависит от того смысла, который мы придадим термину «представлена» и слову «произвольная» (функция). Оставляя в стороне менее интересный случай конечных систем, мы могли бы потребовать, чтобы бесконечный ряд $\sum c_h\varphi_h(x)$ сходиллся в обычном смысле и чтобы его сумма совпадала с $f(x)$. Это ведет к фундаментальной, хотя и трудной теории рядов Фурье и другим ветвям современного анализа (ряды ортогональных многочленов и др.). Однако можно получить менее трудные, но важные результаты, заменив условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - \sum_{h=1}^n c_h\varphi_h(x)] = 0, \quad (2)$$

более слабым¹⁾ условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x) \right]^2 dx = 0. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что любому положительному $\varepsilon > 0$ соответствует такой индекс n_0 , что

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x) \right]^2 dx < \varepsilon \quad (n > n_0). \quad (4)$$

В этом случае мы будем говорить, что бесконечный ряд *сходится в среднем* к функции $f(x)$, и будем писать

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x). \quad (5)$$

Наиболее важным обстоятельством является то, что сходимость в среднем может быть установлена при очень широких предположениях; одним из необходимых условий является, очевидно, интегрируемость с квадратом функции $f(x)$, другим — полнота системы $\{\varphi_h\}$ (этот термин мы вскоре объясним).

Используя условия ортонормальности (3.1.5), получаем

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \int_a^b \left[f(x) - \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{h=1}^n c_h \int_a^b f(x) \varphi_h(x) dx + \sum_{h=1}^n c_h^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Употребление этого прилагательного оправдывается тем, что если условие (2) выполняется *равномерно* на конечном интервале (a, b) , то (3) следует из (2), но не наоборот. Однако может случиться, что (2) выполняется, но не *равномерно* а условие (3) вообще не выполняется.

Если обозначить через a_n коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_h\}$, т. е. если положить

$$a_h = \int_a^b f(x) \varphi_h(x) dx \quad (h = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{h=1}^n a_h c_h + \sum_{h=1}^n c_h^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^n a_h^2 + \sum_{h=1}^n (a_h - c_h)^2. \end{aligned}$$

Поскольку величина

$$\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^n a_h^2$$

не зависит от выбора коэффициентов c_h линейной комбинации (1) и поскольку сумма, содержащая квадраты разностей $a_h - c_h$ всегда неотрицательна, мы видим, что для заданной системы $\{\varphi_h\}$, заданной функции $f(x)$ и заданного числа n членов линейной комбинации (1) неотрицательный интеграл I_n достигает минимального значения тогда и только тогда, когда коэффициенты c_h совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье (6) функции $f(x)$.

Это минимальное значение интеграла I_n , которое мы обозначим через I_n^* , определяется по формуле

$$I_n^* = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^n a_h^2. \quad (7)$$

Таким образом, для любой L_2 -функции $f(x)$ и любого целого положительного n имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{h=1}^n a_h^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (8)$$

Следовательно, бесконечный ряд с неотрицательными членами $\sum a_h^2$ всегда сходится, так что формула (7) может

быть записана в виде

$$I_n^* = \left[\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \right] + \sum_{h=n+1}^{\infty} a_h^2. \quad (9)$$

Таким образом, мы видим, что необходимым и достаточным условием возможности приближения в среднем L_2 -функции $f(x)$ линейной комбинацией функций заданной ОН-системы является выполнение равенства Парсеваля

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 = \int_a^b f^2(x) dx \quad (10)$$

для заданной функции $f(x)$.

В самом деле, если

$$\Delta = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \quad (11)$$

имеет некоторое положительное значение η , то $I_n^* \geq \eta$ для любого n , а значит, и подавно $I_n \geq \eta$. Если же $\Delta = 0$ и $c_h = a_h$, то интеграл I_n^* совпадает с

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} a_h^2$$

и, следовательно, может быть сделан меньше любого $\varepsilon > 0$, если n больше соответствующего n_0 . Теперь легко оценить важность следующего определения.

Определение. ОН-система функций называется полной во всем классе L_2 или на подмножестве M этого класса, если равенство Парсеваля (10) имеет место для каждой функции $f(x)$ из L_2 или из M соответственно.

Если некоторая ОН-система полна в M , то любая функция M может быть приближена в среднем с произвольной точностью линейной комбинацией функций этой системы, и обратно.

Предположим, что функция $f(x)$ задана как предел в среднем некоторой последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...; очевидно, что она определена не в каждой точке,

однако она определена однозначно в том смысле, что если

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x), \quad (12)$$

то *разность* $f(x) - f^*(x)$ равна нулю почти всюду на основном интервале (a, b) .

В самом деле,

$$\begin{aligned} [f(x) - f^*(x)]^2 &= \{[f(x) - f_n(x)] - [f^*(x) - f_n(x)]\}^2 \leq \\ &\leq 2\{[f(x) - f_n(x)]^2 + [f^*(x) - f_n(x)]^2\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx + 2 \int_a^b [f^*(x) - f_n(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Из предположения (12) вытекает теперь, что любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое целое положительное число n_0 , что при $n > n_0$ оба интеграла в правой части меньше ε ; поэтому при $n > n_0$

$$\int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx < 4\varepsilon.$$

Поскольку интеграл слева не зависит от n , то должно быть

$$\int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx = 0.$$

Это и показывает, что разность $f(x) - f^*(x)$ равна нулю почти всюду на интервале (a, b) .

Покажем, наконец, что можно обобщить равенство Парсеваля и получить формулу для интеграла от *произведения* двух L_2 -функций $f(x)$ и $g(x)$.

При помощи полученного выше неравенства для квадрата суммы легко доказать, что *если равенство Парсеваля выполняется для обеих функций $f(x)$ и $g(x)$, то оно выполняется также и для любой их линейной комбинации $\lambda f(x) + \mu g(x)$* . Сравнивая коэффициенты при $2\lambda\mu$

в обеих частях равенства

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]^2 dx = \sum_{h=1}^{\infty} (\lambda a_h + \mu b_h)^2,$$

где a_h и b_h — коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, приходим к *обобщенному равенству Парсеваля*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{h=1}^{\infty} a_h b_h. \quad (13)$$

Это равенство, которое можно также записать в виде

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \int_a^b \varphi_h(x) g(x) dx, \quad (14)$$

обнаруживает интересную связь между L_2 -функцией $f(x)$ и ее рядом Фурье

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h \varphi_h(x), \quad a_h = \int_a^b \varphi_h(x) f(x) dx$$

относительно полной ОН-системы $\{\varphi_h\}$. Известно, что, вообще говоря, эта связь не сводится к равенству. Часто она обозначается знаком Гурвица

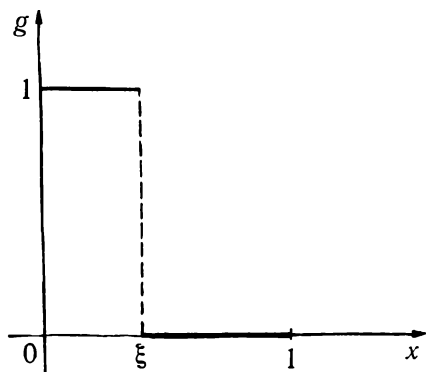
$$f(x) \sim \sum_{h=1}^{\infty} a_h \varphi_h(x). \quad (14')$$

Однако соотношение (14') превращается в точное равенство после умножения обеих его сторон на некоторую L_2 -функцию $g(x)$ и интегрирования по интервалу (a, b) (случай $g(x) \equiv 1$, естественно, включается), если только равенство Парсеваля имеет место как для $f(x)$, так и для $g(x)$ ¹⁾.

¹⁾ Или мы могли бы еще сказать: в предположении, что система $\{\varphi_h\}$ полна по отношению к функциям $f(x)$ и $g(x)$.

В частности, если $g(x)$ — кусочно-постоянная функция

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (a \leq x \leq \xi < b), \\ 0 & (\xi < x \leq b), \end{cases} \quad (15)$$



Р и с. 6.

то мы получаем

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \int_a^{\xi} \varphi_h(x) dx, \quad (16)$$

и нетрудно увидеть, что ряд в правой части сходится *равномерно* относительно ξ .

3.3. Теорема Рисса—Фишера

Если задана ON-система $\{\varphi_h(x)\}$ и последовательность постоянных

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad (1)$$

то сходимость бесконечного ряда $\sum a_h^2$, очевидно, является *необходимым* условием существования L_2 -функции $f(x)$, коэффициенты Фурье которой относительно системы $\{\varphi_h\}$ совпадают с заданными постоянными (1), но будет ли это условие и *достаточным*?

Знаменитая теорема Рисса–Фишера (1907 г.) дала на этот вопрос утвердительный ответ. Это был один из первых блестящих успехов понятия интеграла Лебега¹⁾.

Доказательство весьма просто, если принять без доказательства²⁾ (нетривиальную) лемму Вейля, являющуюся аналогом классического признака сходимости Коши для сходимости в среднем. Эта лемма может быть сформулирована следующим образом:

Для сходимости в среднем на интервале (a, b) последовательности L_2 -функций

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \quad (2)$$

к некоторой функции $f(x)$ из этого же класса L_2 необходимо и достаточно, чтобы каждому положительному ε соответствовало целое положительное число n_0 , такое, что для любой пары целых чисел $m > n_0$, $n > n_0$ выполнялось бы неравенство

$$\int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx < \varepsilon. \quad (3)$$

Итак, предполагая доказанной эту лемму, а также сходимость ряда $\sum a_h^2$, положим

$$f_n(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x). \quad (4)$$

Если $m > n$, то несложные вычисления дают

$$\int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx = \int_a^b \left[\sum_{h=n+1}^m a_h \varphi_h(x) \right]^2 dx = \sum_{h=n+1}^m a_h^2,$$

и поскольку ряд $\sum a_h^2$ сходится, то для каждого положительного ε существует такое целое число n_0 , что при

¹⁾ Интегрирование по Лебегу играет здесь существенную роль, поскольку функция $f(x)$, соответствующая заданной последовательности (1) с условием $\sum a_h^2 < \infty$, может и не быть интегрируемой по Риману.

²⁾ По поводу доказательства см., например, Трикоми [48], стр. 33, Walsh J. L., *Interpolation and approximation, etc.*, New York, 1935, p. 116. [Готовится русский перевод второго издания.—Прим. перев.]

$n > n_0$

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} a_h^2 < \varepsilon.$$

Поэтому для $m > n > n_0$ и подавно имеем

$$\int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

и, в силу леммы Вейля, можно утверждать, что

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

где $f(x)$ — некоторая L_2 -функция. Эта функция имеет заданные постоянные (1) в качестве своих коэффициентов Фурье. В самом деле, обозначая через c_1, c_2, c_3, \dots коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и используя вычисления предыдущего параграфа (поменяв при этом ролями постоянные a_h и c_h), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{h=1}^n c_h^2 + \\ &+ \sum_{h=1}^n (c_h - a_h)^2 \geq \sum_{h=1}^n (c_h - a_h)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если хотя бы одно c_h было отлично от соответствующего a_h , например если бы $c_1 \neq a_1$, то мы имели бы

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \geq (c_1 - a_1)^2,$$

что противоречит соотношению (5).

Таким образом, теорема Рисса — Фишера доказана. Предполагая далее, что система $\{\varphi_n\}$ *полна*, мы можем доказать, что *функция $f(x)$ единственна*. Это утверждение не следует непосредственно из формулы (5), поскольку может существовать совершенно отличная от $f(x)$ функция $f^*(x)$ [которая вовсе не является пределом в среднем

суммы (4)], имеющая те самые коэффициенты Фурье. Однако если система $\{\varphi_n\}$ полна, то это последнее невозможно, поскольку из равенства Парсеваля (3.2.10) и того факта, что все коэффициенты Фурье разности $f(x) - f^*(x)$ равны нулю, следует, что

$$\int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx = 0. \quad (6)$$

3.4. Полнота и замкнутость

Определение. Система L_2 -функций (не обязательно ортогональная) на интервале (a, b) называется замкнутой на некотором подмножестве M из L_2 (которое может совпадать со всем классом L_2), если единственными функциями класса M , ортогональными ко всем функциям заданной системы, являются те, которые равны нулю почти всюду на (a, b) .

Используя это определение, мы можем сформулировать последний результат предыдущего параграфа следующим образом:

Любая ОН-система функций, полная на заданном множестве M функций из L_2 , замкнута на этом множестве.

Мы можем доказать и обратное утверждение:

Любая ОН-система функций, замкнутая на заданном множестве M функций из L_2 , полна на этом множестве.

Для этого заметим сначала, что любая ОН-система $\{\varphi_n\}$ замкнута на специальном классе функций Φ , состоящем из функций φ_h , их линейных комбинаций и пределов в среднем этих комбинаций:

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} [a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)].$$

(Если ряд $\sum a_h^2$ сходится, то существование последней функции обеспечивается рассуждениями § 3.3.)

В самом деле, как показано в предыдущем параграфе,

$$\int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx = a_1, \quad \int_a^b f(x) \varphi_2(x) dx = a_2, \dots,$$

и, следовательно, все эти интегралы равны нулю только в тривиальном случае $a_1 = a_2 = \dots = 0$.

Теперь предположим, что ON-система $\{\varphi_h\}$ замкнута в классе M , а потому (очевидно) и в классе $M + \Phi$. Легко показать, что любая функция $g(x)$ класса M может быть с любой степенью точности приближена линейными комбинациями функций φ_h , т. е., что *эта система полна в M* . Точнее, если пренебречь функциями, равными нулю почти всюду, мы можем написать

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x), \text{ где } a_h = \int_a^b g(x) \varphi_h(x) dx, \quad (1)$$

так как если

$$g^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x),$$

то разность $g(x) - g^*(x)$ является нетривиальной функцией класса $M + \Phi$, коэффициенты Фурье которой все равны нулю, т. е. функцией класса $M + \Phi$, ортогональной ко всем функциям φ_h , что противоречит нашему предположению.

Следовательно, имеет место полная эквивалентность между полнотой и замкнутостью для каждой ON-системы функций¹⁾.

Однако теперь читатель может спросить: существуют ли вообще полные системы функций? (Разумеется, кроме очевидного случая систем, полных в классе Φ .)

Мы можем легко ответить на этот вопрос, рассматривая кусочно-постоянные функции $g(x)$, определенные формулой (3.2.15). Пусть r_1, r_2, r_3, \dots — все рациональные точки интервала (a, b) , упорядоченные произвольным об-

¹⁾ Даже если система не является ортогональной, эта эквивалентность не нарушается, если предположить, что полнота определяется через приближение в среднем вместо равенства Парсеваля. Это объясняет, почему некоторые авторы используют термин *полнота* для выражения того свойства, которое в данной книге называется *замкнутостью*, и наоборот.

разом¹⁾; положим

$$\psi_h(x) = g_{r_h}(x) = \begin{cases} 1 & (a \leq x \leq r_h < b), \\ 0 & (r_h < x \leq b). \end{cases} \quad (2)$$

Легко видеть, что ОН-система $\{\varphi_h(x)\}$, полученная при помощи процесса ортогонализации (см. § 3.1) из функций ψ_h , является *замкнутой во всем классе L_2* .

В самом деле, каждая L_2 -функция $f(x)$, ортогональная ко всем функциям φ_h , должна быть ортогональной и ко всем функциям ψ_h , т. е.

$$\int_a^{r_h} f(x) dx = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots).$$

Иными словами, *определенный интеграл $F(\xi)$ функции $f(x)$*

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x) dx$$

обращается в нуль во всех рациональных точках интервала (a, b) . Однако этот интервал непрерывен (и даже абсолютно непрерывен); следовательно, $F(\xi) \equiv 0$ всюду, и функция $f(x)$ должна быть равной нулю почти всюду²⁾.

Мы сформулируем сейчас некоторые признаки замкнутости (полноты) ОН-системы L_2 -функций, которыми удобнее пользоваться, чем голыми определениями. Сначала мы установим очевидный критерий:

1. *Никакая конечная ОН-система $\{\varphi_h(x)\}$ ($h = 1, 2, \dots, n$) не может быть замкнутой на множестве, отличном от множества Φ линейных комбинаций функций φ_h .*

В самом деле, если $\psi(x)$ — произвольная L_2 -функция, не принадлежащая множеству Φ , то легко построить

¹⁾ Заметим, что множество рациональных точек любого интервала (a, b) *всюду плотно*, т. е. каждая точка интервала является предельной точкой этого множества, но, несмотря на это, оно все же *счетно*.

²⁾ Поскольку $f(x)$ совпадает почти всюду с производной от $F(x)$.

(см. § 3.1) отличную от нуля функцию

$$k_{n+1,1} \varphi_1(x) + k_{n+1,2} \varphi_2(x) + \dots + k_{n+1,n} \varphi_n(x) + \psi(x),$$

ортогональную ко всем функциям системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Другой простой, но полезный критерий полноты заключается в следующем:

II. Если функции из подмножества M класса L_2 (M может даже совпадать с L_2) могут быть приближены (в среднем) с какой угодно степенью точности линейными комбинациями функций из другого подмножества M' класса L_2 , то каждая система $\{\varphi_h\}$, полная в M' , полна и в M .

В самом деле, повторяя рассуждения, проделанные при распространении равенства Парсеваля на произведение двух функций (§ 3.2), мы видим, во-первых, что система $\{\varphi_h\}$ остается полной, если дополнить M' до (вообще говоря) более обширного подмножества $M^* \equiv M' + M''$, присоединяя к нему множество M'' всех линейных комбинаций любого конечного числа функций из M' . Во-вторых, для любой заданной функции $f(x)$ из M и любого положительного числа ε мы всегда можем найти в M^* такую линейную комбинацию $f_m^*(x)$ m функций из M' и такую линейную комбинацию $f_n(x)$ первых n функций системы $\{\varphi_h\}$, что ¹⁾

$$\int_a^b [f(x) - f_m^*(x)]^2 dx < \frac{1}{4} \varepsilon, \quad \int_a^b [f_m^*(x) - f_n(x)]^2 dx < \frac{1}{4} \varepsilon.$$

Однако

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx &\leq 2 \int_a^b [f(x) - f_m^*(x)]^2 dx + \\ &+ 2 \int_a^b [f_m^*(x) - f_n(x)]^2 dx < \varepsilon; \end{aligned}$$

следовательно, система $\{\varphi_h\}$ полна и в M .

¹⁾ Первое неравенство имеет место, поскольку функции из M могут быть приближены с произвольной степенью точности линейными комбинациями M' -функций, а второе — поскольку система $\{\varphi_h\}$ полна в M' .

Непосредственным следствием предыдущей теоремы является относящийся к случаю $M \equiv L_2$ так называемый критерий Лауричеллы (1912 г.), который (не только из соображений исторического характера) заслуживает того, чтобы его точно сформулировать.

III. Если некоторая система $\{\varphi_n\}$ L_2 -функций (не обязательно ортонормальная) полна по отношению ко всем функциям другой системы $\{\psi_n\}$, ортогональной или нет, относительно которой известно, что она полна в L_2 , то система $\{\varphi_n\}$ также полна в L_2 .

Из критерия Лауричеллы вытекает полезное условие замкнутости Витали (1921 г.):

IV. Необходимым и достаточным условием полноты ОН-системы L_2 -функций $\{\varphi_h\}$ во всем классе L_2 является соотношение

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[\int_a^{\xi} \varphi_h(x) dx \right]^2 = \xi - a \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (3)$$

Это — следствие критерия III и того факта, что приведенная выше система (2) кусочно-постоянных функций замкнута (и, следовательно, полна) во всем классе L_2 , поскольку (3) при $\xi = r_h$ есть не что иное, как равенство Парсеваля для функций (2) относительно системы $\{\varphi_h\}$. Мы видим, таким образом, что достаточно выполнения условия (3) только для рациональных значений ξ из интервала (a, b) ; это очевидно, поскольку в обеих частях равенства (3) стоят функции, непрерывные по ξ .

Если пользоваться только определением, то при доказательстве полноты некоторой ОН-системы в пространстве L_2 было бы необходимо проверять равенство Парсеваля для всех L_2 -функций. Условие Витали показывает нам, что на самом деле достаточно рассмотреть только множество ∞^1 кусочно-постоянных функций $g_i(x)$.

Возможно и дальнейшее усовершенствование этого критерия в том смысле, что рассмотрение функционального ряда, каким является ряд (3), можно заменить проверкой того, что некоторый ряд с постоянными членами имеет определенную сумму. Это было показано Далзеллом¹⁾,

¹⁾ Dalzell D. P., J. London Math. Soc. 20 (1945), 87—93.

заметившим, что в силу неравенства Бесселя для кусочно-постоянной функции $g_{\xi}(x)$ разность

$$\Delta(\xi) = \xi - a - \sum_{h=1}^{\infty} \left[\int_a^{\xi} \varphi_h(x) dx \right]^2$$

всегда неотрицательна. Следовательно, условие

$$\int_a^b \Delta(\xi) d\xi = 0 \quad (4)$$

не только необходимо (это очевидно), но и достаточно для того, чтобы выполнялось равенство (3), т. е. для замкнутости системы $\{\varphi_h\}$. В самом деле, если интеграл от неотрицательной функции равен нулю, то подинтегральная функция должна быть равной нулю почти всюду на интервале интегрирования. Больше того, из условия (4) мы можем заключить, что $\Delta(\xi) \equiv 0$ всюду, поскольку подинтегральная функция непрерывна. Чтобы показать это, заметим, что если положить

$$\int_a^{\xi_i} \varphi_h(x) dx \int_a^{b} g_{\xi_i}(x) \varphi_h(x) dx = a_{h_i} \quad (i = 1, 2),$$

то, используя неравенство Бесселя, можно последовательно получить

$$\begin{aligned} [\Delta(\xi_1) - \Delta(\xi_2) - (\xi_1 - \xi_2)]^2 &= \left[\sum_{h=1}^{\infty} (a_{h_1}^2 - a_{h_2}^2) \right]^2 = \\ &= \left[\sum_{h=1}^{\infty} (a_{h_1} + a_{h_2})(a_{h_1} - a_{h_2}) \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^{\infty} (a_{h_1} + a_{h_2})^2 \sum_{h=1}^{\infty} (a_{h_1} - a_{h_2})^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{h=1}^{\infty} (a_{h_1}^2 + a_{h_2}^2) \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [g_{\xi_1}(x) - g_{\xi_2}(x)] \varphi_h(x) dx \right\}^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 \left[\int_a^b g_{\xi_1}^2(x) dx + \int_a^b g_{\xi_2}^2(x) dx \right] \int_a^b [g_{\xi_1}(x) - g_{\xi_2}(x)]^2 dx \leq$$

$$\leq 4(b-a) \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} dx \right| = 4(b-a) |\xi_1 - \xi_2|.$$

Отсюда следует, что

$$|\Delta(\xi_1) - \Delta(\xi_2)| \leq |\xi_1 - \xi_2| + 2\sqrt{(b-a)|\xi_1 - \xi_2|}.$$

Из непрерывности $\Delta(\xi)$, а также теоремы Дини о равномерной сходимости ряда неотрицательных функций, сумма которого непрерывна¹⁾, заключаем также, что при вычислении интеграла (4) допустимо почленное интегрирование. Тогда мы получаем условие Далзелла в виде:

V. *Необходимым и достаточным условием полноты ортонормальной системы L_2 -функции $\{\varphi_h\}$ во всем классе L_2 является выполнение соотношения*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_a^b \left[\int_a^{\xi} \varphi_h(x) dx \right]^2 d\xi = \frac{1}{2} (b-a)^2. \quad (5)$$

Более общо вместо условия (4) мы можем написать $\int_a^b \Delta(\xi) q(\xi) d\xi = 0$, где $q(\xi)$ — некоторая неотрицательная L_2 -функция, обращающаяся в нуль самое большее на множестве нулевой меры; соответственно получаем условие

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_a^b \left[\int_a^{\xi} \varphi_h(x) dx \right]^2 q(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_a^{\xi} (\xi - a) q(\xi) d\xi, \quad (6)$$

которое иногда проверяется легче, чем условие (5). Относительно дальнейших признаков полноты см. Tricomi F. G., Sulla chiusura dei sistemi ortogonali di funzioni, *Rev. Un. mat. argent.*, 17 (1955), 299—303.

¹⁾ См., например, Dini U., *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Pisa, 1907—1909, v. 1.

3.5. Полнота системы тригонометрических функций и многочленов

Очень важной ортонормальной системой является система тригонометрических функций

$$(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2} \cos x, \pi^{-1/2} \sin x, \pi^{-1/2} \cos 2x, \pi^{-1/2} \sin 2x, \dots, \quad (1)$$

которая в такой записи ортонормальна на основном интервале $(-\pi, \pi)$.

Система тригонометрических функций полна во всем классе L_2 .

Мы можем доказать этот основной факт, проверив, что условие Далзелла (3.4.4) выполняется для соответствующей функции $\Delta(\xi)$, а именно, для функции

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) &= \xi + \pi - (2\pi)^{-1} \left(\int_{-\pi}^{\xi} dx \right)^2 - \\ &- \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\pi}^{\xi} \cos nx \, dx \right]^2 + \left[\int_{-\pi}^{\xi} \sin nx \, dx \right]^2 \right\} = \\ &= \xi + \pi - (2\pi)^{-1} (\xi + \pi)^2 - \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \{ (\sin n\xi)^2 + \\ &+ [\cos n\xi - (-1)^n]^2 \} = \frac{1}{2} \pi - 2\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} - \\ &- (2\pi)^{-1} \xi^2 + 2\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2} \cos n\xi. \end{aligned}$$

Нам нужно только показать, что

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(\xi) \, d\xi = \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} - (2\pi)^{-1} \frac{2\pi^3}{3} +$$

$$+ 2\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-3} [\sin n\xi]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2},$$

т. е. что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{1}{6} \pi^2. \quad (2)$$

Однако равенство (2) хорошо известно¹⁾.

Теперь мы докажем, что система *многочленов* на любом конечном интервале (a, b) полна, т. е. что (*неортогональная*) система

$$1, x, x^2, x^3, \dots \quad (3)$$

замкнута и, следовательно, полна во всем классе L_2 .

Мы используем метод, основанный на том замечании, что если функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям системы (3), то она должна быть ортогональной к любой их линейной комбинации, т. е. к любому *многочлену*, в частности к специальному многочлену степени $2n$

$$P_n(x) = \left[1 + \frac{\delta^2 - (x - x_0)^2}{(b-a)^2} \right]^n,$$

где x_0 и δ — постоянные, значения которых мы вскоре определим.

Мы докажем, что равенство

$$I_n = \int_a^b P_n(x) f(x) dx = 0 \quad (4)$$

возможно только в том случае, если $f(x) \equiv 0$ — сначала для случая, когда $f(x)$ непрерывна, а потом и для произвольной L_2 -функции $f(x)$. Если $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, не равная тождественно нулю на интервале (a, b) , то должна существовать по крайней мере одна *внутренняя* точка x_0 , в которой $f(x_0) \neq 0$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $f(x_0) = \eta > 0$.

¹⁾ См., например, Кн о п п [22], где приведено несколько доказательств этого важного равенства. См. также § 3.10.

Следовательно, положительное число δ может быть выбрано настолько малым, что интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будет полностью содержаться в интервале (a, b) , причем

$$f(x) > \frac{1}{2} \eta > 0 \quad (x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta). \quad (5)$$

Далее, в этом же интервале справедливы неравенства

$$0 \leq \frac{\delta^2 - (x - x_0)^2}{(b - a)^2} < 1,$$

а в меньшем интервале $(x_0 - \delta' \leq x \leq x_0 + \delta')$ ($0 < \delta' < \delta$) — даже неравенства

$$0 < \mu \leq \frac{\delta^2 - (x - x_0)^2}{(b - a)^2} < 1,$$

где μ — некоторая положительная постоянная. Отсюда

$$(1 + \mu)^n \leq P_n < 2^n \quad (x_0 - \delta' \leq x \leq x_0 + \delta').$$

Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} P_n(x) f(x) dx &> \int_{x_0 - \delta'}^{x_0 + \delta'} P_n(x) f(x) dx > \\ &> \frac{1}{2} \eta 2\delta' (1 + \mu)^n = \eta \delta' (1 + \mu)^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим теперь оставшиеся части $(a \leq x \leq x_0 - \delta)$ и $(x_0 + \delta \leq x \leq b)$ интервала интегрирования, на которых

$$0 < 1 + \frac{\delta^2 - (x - x_0)^2}{(b - a)^2} \leq 1.$$

Обозначая через A верхнюю грань абсолютного значения непрерывной функции $f(x)$, получаем

$$\left| \int_a^{x_0 - \delta} + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) P_n(x) dx \right| \leq \int_a^{x_0 - \delta} + \int_{x_0 + \delta}^b |f(x)| dx < A(b - a).$$

Отсюда вытекает, что эта часть интеграла I_n остается ограниченной при $n \rightarrow \infty$. Однако в силу неравенств (6) интеграл по интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ стремится к ∞ при

$n \rightarrow \infty$; следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty,$$

что противоречит исходному равенству (4).

Таким образом, утверждение доказано в случае непрерывной функции $f(x)$. Если $f(x)$ не непрерывна, а только L -интегрируема¹⁾, то положим

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = F(\xi).$$

Проинтегрировав по частям равенство (4), в котором $P_n(x)$ обозначает теперь произвольный многочлен, получим

$$\int_a^b P'_n(x) F(x) dx = 0, \quad (7)$$

поскольку очевидно $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$, так как функция $f(x)$ должна быть ортогональной к функции 1, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Но производная от многочлена есть снова многочлен, следовательно, согласно первой части доказательства, непрерывная функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям (7), тождественно равна нулю, так что функция $f(x)$ должна быть равной нулю почти всюду на интервале (a, b) .

Мы доказали, таким образом, что система (3) полна не только в L_2 , но даже и в L .

Заметим, что для справедливости результатов настоящего параграфа существенно предположение о конечности основного интервала.

Если мы попытаемся получить представление «произвольной» функции $f(x)$ при помощи функций (1) или (3) на бесконечном интервале, то вместо рядов нам придется использовать интегралы, такие, как интеграл Фурье (или

¹⁾ Следовательно, мы не полностью используем предположение, что $f(x) \in L_2$; достаточно предположить, что $f(x) \in L$.

преобразование Фурье) и преобразования Меллина или Лапласа.

3.6. Приближение L_2 -ядра общего вида PG -ядрами

Мы рассмотрим два применения предыдущей теории к интегральным уравнениям. Сначала мы докажем теорему, игравшую существенную роль в предыдущей главе (§ 2.4):

Любое L_2 -ядро $K(x, y)$, т. е. любое ядро, для которого обе функции

$$A(x) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dy \right]^{1/2}, \quad B(y) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dx \right]^{1/2} \quad (1)$$

существуют почти всюду на основном интервале $(0, 1)$, и принадлежат классу L_2 , может быть разложено (и притом бесконечным множеством способов) в сумму некоторого PG -ядра

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y) \quad (2)$$

и другого L_2 -ядра $T(x, y)$, норма которого может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа ϵ :

$$\|T\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy < \epsilon^2. \quad (3)$$

Для доказательства рассмотрим некоторую ОН-систему $\{\varphi_h\}$ L_2 -функций, полную на основном интервале $(0, 1)$, например систему ортогональных многочленов, полученную при помощи ортогонализации (см. § 3.1) системы (3.5.3)¹⁾. Положим

$$\int_0^1 K(x, y) \varphi_h(x) dx = a_h(y) \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

¹⁾ Эти многочлены во многом сходны с многочленами Лежандра, которые получаются ортогонализацией степеней x на основном интервале $(-1, 1)$.

и заметим, что (очевидно, измеримые) функции $a_h(y)$ принадлежат классу L_2 , поскольку, в силу равенства Парсеваля,

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2(y) = \int_0^1 K^2(x, y) dx = B^2(y),$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 a_h^2(y) dy \leq \int_0^1 \left[\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2(y) \right] dy = \int_0^1 B^2(y) dy = \|K\|^2.$$

Кроме того, из формулы (3.2.9) и полноты системы $\{\varphi_h\}$ вытекает, что

$$\int_0^1 \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^n \varphi_h(x) a_h(y) \right]^2 dx = \sum_{h=n+1}^{\infty} a_h^2(y).$$

Ряд в правой части может быть в силу фундаментальной теоремы Лебега проинтегрирован почленно, поскольку все его члены неотрицательны; поэтому получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^n \varphi_h(x) a_h(y) \right]^2 dx dy = \sum_{h=n+1}^{\infty} \int_0^1 a_h^2(y) dy.$$

Если мы положим

$$\sum_{h=1}^n \varphi_h(x) a_h(y) = S(x, y), \quad K(x, y) - S(x, y) = T(x, y) \quad (5)$$

и обозначим через R_n сумму членов сходящегося ряда с постоянными членами

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_0^1 a_h^2(y) dy = \int_0^1 B^2(y) dy = \|K\|^2,$$

начиная с $(n+1)$ -го, то мы сможем написать

$$\|T\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy = R_n. \quad (6)$$

Это показывает, что неравенство (3) выполняется, если номер n настолько велик, что $R_n < \epsilon^2$.

Заметим, наконец, что $S(x, y)$ на самом деле является PG -ядром, ибо если функции $a_1(y), a_2(y), \dots, a_n(y)$ линейно зависимы, то число n членов суммы можно уменьшить так, что новые функции будут уже линейно независимыми.

3.7. Метод Энскогога

Другим важным применением предыдущей теории к интегральным уравнениям Фредгольма с ядром *общего вида* (т. е. необязательно симметричным) является метод Энскогога (1926 г.) для численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (1)$$

Исходным пунктом этого метода служит формула Грина (2.1.15), которая вместе с уравнением (1) приводит к равенству

$$\int_0^1 \mathcal{F}_x^*[\Phi(y)] \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \Phi(x) dx, \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — «произвольная» функция, для которой выполняется формула Грина. В частности, мы можем положить $\Phi(x) = \varphi_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots$), где $\{\varphi_h(x)\}$ — *любая* фиксированная полная на интервале $(0,1)$ ОН-система, к каждой функции которой применима формула Грина (например, система ортогональных многочленов из предыдущего параграфа). Положив затем

$$\mathcal{F}_x^*[\varphi_h(y)] = \psi_h(x) \quad (3)$$

и

$$\int_0^1 f(x) \varphi_h(x) dx = a_h, \quad (4)$$

мы получим из равенства (2), что

$$\int_0^1 \varphi(x) \psi_h(x) dx = a_h. \quad (5)$$

Иными словами, мы можем вычислить для неизвестной

функции $\varphi(x)$ ее «коэффициенты Фурье» относительно системы функций

$$\psi_1(x) = \mathcal{F}_x^*[\varphi_1(y)], \quad \psi_2(x) = \mathcal{F}_x^*[\varphi_2(y)], \quad \dots \quad (6)$$

Трудность состоит в том, что, вообще говоря, эта система неортогональна.

Однако если функции ψ_h линейно независимы, то мы можем проортонормировать систему (6) (см. § 3.1) и получить таким образом полную ON-систему вида

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(x) &= \alpha_{11}\psi_1(x), \\ \chi_2(x) &= \alpha_{21}\psi_1(x) + \alpha_{22}\psi_2(x), \\ \chi_3(x) &= \alpha_{31}\psi_1(x) + \alpha_{32}\psi_2(x) + \alpha_{33}\psi_3(x), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Относительно этой системы коэффициенты Фурье неизвестной функции $\varphi(x)$ выражаются при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1, \\ b_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2, \\ b_3 &= \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следовательно, неизвестную функцию $\varphi(x)$ можно «теоретически» вычислить по формуле

$$\varphi(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n b_h \chi_h(x), \quad (9)$$

а практически ее можно отождествить с суммой в правой части равенства (9), соответствующей достаточно большому n .

Этот метод неприменим тогда и только тогда, когда система $\{\psi_h\}$ не может быть ортогонализована. Это, разумеется, может случиться только в том случае, когда она линейно зависима, т. е. тогда и только тогда, когда существует такое целое число n и такие n постоянных $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (не равных одновременно нулю), что

$$0 \equiv \mu_1\psi_1(x) + \dots + \mu_n\psi_n(x) = \mathcal{F}_x^*[\mu_1\varphi_1(y) + \dots + \mu_n\varphi_n(y)].$$

Функция $\mu_1\varphi_1(y) + \dots + \mu_n\varphi_n(y)$ заведомо отлична от нуля почти всюду, поскольку система $\{\varphi_h\}$ линейно неза-

висима (так как она ортогональна). Следовательно, метод Энского неприменим тогда и только тогда, когда существует отличная от нуля функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$0 \equiv \mathcal{F}_x^*[\Phi(y)] \equiv \Phi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x) \Phi(y) dy,$$

т. е. тогда и только тогда, когда λ является собственным значением¹⁾ данного интегрального уравнения.

За исключением этого случая, обе системы $\{\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ полны, поскольку в силу равенств

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x) \psi_h(x) dx &= \int_0^1 \mathcal{F}_x[F(y)] \varphi_h(x) dx = \\ &= \int_0^1 \left[F(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) F(y) dy \right] \varphi_h(x) dx \quad (h = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

и в силу полноты системы $\{\varphi_h\}$ отличная от нуля и ортогональная ко всем ψ_n функция $F(x)$ может существовать тогда и только тогда, когда она удовлетворяет однородному уравнению

$$F(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) F(y) dy = 0,$$

т. е. тогда и только тогда, когда λ является собственным значением.

Метод Энского, который может быть использован для независимого построения теории интегральных уравнений Фредгольма, особенно удобен, когда функции φ_h не очень сильно отличаются от собственных функций симметричного ядра

$$K(x, y) + K(y, x) - \lambda \int_0^1 K(x, z) K(y, z) dz \quad (10)$$

¹⁾ Вспомним, что ядра $K(x, y)$ и $K(y, x)$ имеют одни и те же собственные значения (§ 2.3).

[которое встретится нам позже (§ 3.16)], поскольку в этом случае функции ψ_h «почти» ортогонализированы ¹⁾.

3.8. Спектр симметричного ядра

Возвращаясь теперь к уравнениям с *симметричными* ядрами, заметим сначала, что если

$$K(x, y) = K(y, x), \quad (1)$$

то также

$$K_n(x, y) = K_n(y, x) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2)$$

и

$$H(x, y; \lambda) = H(y, x; \lambda). \quad (3)$$

Нетрудно также показать, что *собственные значения и собственные функции* любого вещественного симметричного ядра *вещественны* ²⁾.

В самом деле, если вещественное симметричное ядро обладает комплексным собственным значением $\lambda_1 = a + ib$ и соответствующей собственной функцией $\varphi_1(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$, то оно должно также обладать сопряженным собственным значением $\lambda_2 = a - ib$ и соответствующей собственной функцией $\varphi_2(x) = \alpha(x) - i\beta(x)$. А так как собственные функции симметричного ядра, соответствующие двум *различными* собственным значениям λ_1 и λ_2 , ортогональны, мы имеем ³⁾

$$\int \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int [\alpha^2(x) + \beta^2(x)] dx = 0.$$

¹⁾ Если функции φ_h в *точности* совпадают с упомянутыми собственными функциями, то функции ψ_h уже ортогонализированы. См., например, Трикоми [49], стр. 154.

²⁾ Поскольку любая собственная функция может быть умножена на произвольную постоянную (которая может и не быть вещественной), то, говоря о вещественности множества собственных функций, мы подразумеваем, что эти функции могут быть сделаны вещественными путем умножения их на соответствующие постоянные множители или путем образования соответствующих линейных комбинаций (в случае собственных значений с кратностью больше единицы).

³⁾ Как и в предыдущей главе, мы не будем указывать пределов интегрирования, когда интегрирование будет производиться по интервалу $(0,1)$.

Но это противоречит предположению, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются *собственными функциями*, т. е. функциями, не почти всюду равными нулю.

Другим важным свойством симметричных ядер является то, что их спектры никогда не пусты ¹⁾.

Каждое не равное тождественно нулю симметричное L_2 -ядро имеет по крайней мере одно собственное значение.

Согласно приведенным в конце § 2.5 замечаниям о соотношениях между спектром некоторого ядра $K(x, y)$ и спектрами его итерированных ядер, достаточно провести доказательство для итерированного ядра $K_2(x, y)$. Точнее, достаточно показать, что бесконечный ряд (2.5.18), соответствующий ядру K_2 , т. е. ряд

$$A_2 + A_4\lambda^2 + A_6\lambda^4 + \dots, \quad (4)$$

где

$$A_{2m} = \int K_{2m}(x, x) dx, \quad (5)$$

имеет *конечный* радиус сходимости ϱ . Кроме того, если мы сможем указать оценку сверху ϱ^* для этого ϱ , то мы найдем также оценку сверху

$$|\lambda_1| = \sqrt{\varrho} \leq \sqrt{\varrho^*} \quad (6)$$

для наименьшей абсолютной величины собственных значений ²⁾.

Для этого заметим, что из формулы

$$K_{m+n}(x, y) = \int K_m(x, z) K_n(z, y) dz$$

для *симметричных* ядер вытекает, что

$$K_{m+n}(x, x) = \int K_m(x, y) K_n(x, y) dy,$$

и, следовательно, используя неравенство Буняковского —

¹⁾ Спектром ядра называется множество его собственных значений.

²⁾ Иными словами, мы обозначаем через λ_1 собственное значение с наименьшей абсолютной величиной. Если оба значения $\pm\lambda_1$ являются собственными, то через λ_1 обозначается *положительное* собственное значение.

Шварца для двойных интегралов, мы получаем

$$\begin{aligned} A_{m+n}^2 &= \left[\int K_{m+n}(x, x) dx \right]^2 = \\ &= \left[\iint K_m(x, y) K_n(x, y) dx dy \right]^2 \leq \\ &\leq \iint K_m^2(x, y) dx dy \iint K_n^2(x, y) dx dy = \\ &= \int K_{2m}(x, x) dx \int K_{2n}(x, x) dx = A_{2m} A_{2n}. \end{aligned}$$

В частности, заменяя m и n на $n-1$ и $n+1$ соответственно, находим

$$A_{2n}^2 \leq A_{2n-2} A_{2n+2} \quad (n=2, 3, \dots). \quad (7)$$

Из этих неравенств непосредственно вытекает, что величины A_2, A_4, A_6, \dots (заведомо неотрицательные) строго *положительны*. Действительно, если $A_{2n+2} = 0$, то $A_{2n} = 0$ и, следовательно,

$$A_{2n-2} = A_{2n-4} = \dots = A_4 = 0.$$

Однако если

$$A_4 = \int K_4(x, x) dx = 0,$$

то, как показывает соотношение

$$K_4(x, x) = \int K_2^2(x, y) dy \geq 0,$$

$K_4(x, x) \equiv 0$ почти всюду. Отсюда следует, что, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль на интервале $0 \leq x \leq 1$, мы должны также иметь

$$\int K_2^2(x, y) dy = 0.$$

Поэтому, пренебрегая самое большее некоторым множеством меры нуль на интервале $0 \leq x \leq 1$ и аналогичным множеством на интервале $0 \leq y \leq 1$, будем иметь $K_2(x, y) \equiv 0$. Отсюда вытекает равенство

$$\int K_2(x, x) dx = \|K\|^2 = 0,$$

которое противоречит нашему предположению. Более того, мы видим, что $A_2 = \|K\|^2$ положительно.

Тот факт, что $A_{2m} > 0$ ($m = 1, 2, \dots$), позволяет записать неравенства (7) в виде

$$\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}} \leq \frac{A_{2n-2}}{A_{2n}},$$

откуда следует, что *положительная* дробь A_{2n}/A_{2n+2} не возрастает с возрастанием n и, значит, стремится к *конечному* пределу $L > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку этот предел совпадает с радиусом сходимости ϱ ряда (4), имеем

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}, \quad (8)$$

а также

$$\lambda_1^2 \leq \frac{A_{2n}}{A_{2n+2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Полагая, в частности $n = 1$, получаем очень полезную *оценку* сверху:

$$|\lambda_1| \leq \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = \frac{\|K\|}{\|K_2\|}. \quad (10)$$

Мы доказали, таким образом, что каждое симметричное (ненулевое) ядро $K(x, y)$ имеет по крайней мере одно собственное значение λ_1 и соответствующую собственную функцию $\varphi_1(x)$, которую мы можем предположить *пронормированной*. Отсюда следует, что если симметричное ядро

$$K^{(2)}(x, y) = K(x, y) = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{\lambda_1}$$

не есть тождественный нуль, то оно также должно обладать по крайней мере одним собственным значением λ_2 с соответствующей собственной функцией $\varphi_2(x)$. Больше того, хотя λ_1 может даже совпадать с λ_2 , мы можем быть уверенными, что $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$. В самом деле, $\varphi_1(x)$ не может быть собственной функцией «укороченного» ядра $K^{(2)}(x, y)$, так как

$$\begin{aligned} \int K^{(2)}(x, y) \varphi_1(y) dy &= \int K(x, y) \varphi_1(y) dy - \\ &- \frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1} \int \varphi_1^2(y) dy \equiv 0. \end{aligned}$$

Продолжая действовать указанным образом, мы рассматриваем третье симметричное ядро

$$\begin{aligned} K^{(3)}(x, y) &= K^{(2)}(x, y) - \frac{\varphi_2(x) \varphi_2(y)}{\lambda_2} = \\ &= K(x, y) - \sum_{h=2}^2 \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \end{aligned}$$

и т. д.

Существуют две возможности:

Либо процесс обрывается после n шагов, т. е. $K^{(n+1)}(x, y) \equiv 0$, и тогда $K(x, y)$ является ядром Пинкерле—Гурса:

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}, \quad (11)$$

либо процесс можно продолжать неограниченно, и тогда существует *бесконечное число собственных значений*¹⁾. Следовательно, *каждое ненулевое симметричное ядро либо имеет бесконечное число собственных значений, либо является PG-ядром.*

В обоих случаях мы будем в дальнейших рассуждениях предполагать, что спектр ядра упорядочен следующим образом:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots, \quad (12)$$

причем положительные собственные значения предшествуют отрицательными (в случае, если оба значения $\pm \lambda_i$ являются собственными). Далее, мы будем считать, что собственные значения с кратностью $r > 1$ (если они существуют) повторяются r раз, а соответствующие r линейно независимых собственных функций, как и остальные собственные функции, проортogonalизированы (см. § 3.1), а затем и пронормированы.

Поэтому, обозначая через

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \quad (13)$$

¹⁾ Существует на самом деле бесконечно много различных собственных значений, поскольку каждое значение может встретиться в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ только конечное число раз, а именно, число раз, равное *кратности* данного значения.

собственные функции, отвечающие значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ соответственно, мы получим ортонормальную на основном интервале $(0,1)$ систему функций, т. е.

$$(\varphi_h, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & (h \neq k), \\ 1 & (h = k) \end{cases} \quad (14)$$

для всех h, k .

3.9. Билинейная формула

К сожалению, билинейная формула (3.8.11), справедливая в случае конечного числа собственных значений, не может быть распространена на общий случай, поскольку (как показывают примеры) бесконечный ряд, соответствующий сумме в правой части формулы (3.8.11), не обязан сходиться. Мы можем тем не менее написать

$$K(x, y) \sim \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \quad (1)$$

в смысле формулы (3.2.14'), так как коэффициенты Фурье ядра $K(x, y)$, рассматриваемого как функция от y (соответственно, от x), относительно ОН-системы (3.8.13) очевидно равны $\varphi_n(x)/\lambda_n$ [соответственно $\varphi_h(y)/\lambda_h$] в силу того, что для собственных функций

$$\int K(x, y) \varphi_h(y) dy = \frac{\varphi_h(x)}{\lambda_h} \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

В дальнейшем мы укажем некоторые случаи (отличные от случая конечного числа собственных значений), когда знак Гурвица \sim в формуле (1) можно заменить знаком равенства. Сейчас же мы покажем, что даже если система $\{\varphi_h\}$ неполна¹⁾ (что случается довольно часто), ряд (1) сходится в среднем к ядру $K(x, y)$

$$K(x, y) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}. \quad (3)$$

¹⁾ Иначе этот факт был бы тривиальным.

Иначе говоря, мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^n \lambda_h^{-1} \varphi_h(x) \varphi_h(y) \right]^2 dx dy = 0.$$

Сходимость в среднем этого ряда по одному переменному (т. е. относительно только x или только y) является следствием теоремы Рисса — Фишера (§ 3.3) и неравенства Бесселя, поскольку для почти всех y из интервала $(0, 1)$ в обозначениях § 2.1 и 3.7 имеем

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_h(x)}{\lambda_h} \right]^2 \leq \int K^2(x, y) dy = A^2(x) = B^2(x).$$

Однако не очевидно, что симметричная по x и y функция

$$K^*(x, y) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \quad (4)$$

должна совпадать почти всюду с $K(x, y)$ и в том случае, когда система $\{\varphi_h\}$ неполна.

Мы докажем это, установив, что симметричное ядро

$$R(x, y) = K(x, y) - K^*(x, y) \quad (5)$$

не имеет ни собственных значений, ни собственных функций и, следовательно, должно быть равным нулю почти всюду в квадрате $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

(I) Заметим, во-первых, что

$$\int R(x, y) \varphi_h(y) dy = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

ибо, как мы видели при доказательстве теоремы Рисса — Фишера, функции $K^*(x, y)$ и $K(x, y)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье относительно ON-системы $\{\varphi_h(x)\}$, равные $\varphi_h(y)/\lambda_h$.

(II) Во-вторых, используя равенство (5), мы покажем, что любая собственная функция $\psi(x)$ ядра $R(x, y)$, т. е. любая нормированная функция, для которой

$$\psi(x) = \mu \int R(x, y) \psi(y) dy \quad (7)$$

(где μ — соответствующая постоянная) ортогональна ко всем функциям системы $\{\varphi_h\}$, т. е. что

$$(\psi, \varphi_h) = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

В самом деле, в силу (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \varphi_h(x) dx &= \mu \int \varphi_h(x) dx \int R(x, y) \psi(y) dy = \\ &= \mu \int \psi(y) dy \int R(x, y) \varphi_h(x) dx = 0. \end{aligned}$$

(III) В-третьих, функция ψ должна также удовлетворять условию

$$I \equiv \int K^*(x, y) \psi(y) dy = 0. \quad (9)$$

Действительно, используя соотношения (8) и вводя обозначение

$$\sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} = \Phi_n(x, y), \quad (10)$$

для любого положительного целого n будем иметь

$$\begin{aligned} I &= \int [K^*(x, y) - \Phi_n(x, y)] \psi(y) dy + \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x)}{\lambda_h} \times \\ &\times \int \varphi_h(y) \psi(y) dy = \int [K^*(x, y) - \Phi_n(x, y)] \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, если n достаточно велико, то, используя неравенство Буняковского — Шварца и учитывая (4), получаем

$$\begin{aligned} I^2 &\leq \int [K^*(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dy \int \psi^2(y) dy = \\ &= \int [K^*(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dy < \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε имеет обычный смысл. Поскольку I не зависит от n , отсюда вытекает, что $I = 0$.

После этих приготовлений мы можем непосредственно доказать, что собственная функция $\psi(x)$ не существует.

В самом деле, согласно (7) и (9), имеем

$$\mu \int K(x, y) \psi(y) dy = \mu \int R(x, y) \psi(y) dy + \\ + \mu \int K^*(x, y) \psi(y) dy = \psi(x).$$

Следовательно, функция $\psi(x)$, ортогональная ко всем функциям $\{\varphi_h\}$, является также собственной функцией данного ядра $K(x, y)$, т. е. она является одной из функций $\varphi_h(x)$ и поэтому должна быть ортогональной к самой себе.

Используя полученный результат, мы можем доказать следующее положение:

Если бесконечный ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \quad (11)$$

сходится равномерно или по крайней мере так, что любому положительному ε соответствует такое целое положительное число n_0 , что

$$\iint \left[\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \right]^2 dx dy < \varepsilon \quad (n > n_0), \quad (12)$$

то

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}. \quad (13)$$

Обозначая через $S(x, y)$ сумму ряда (11), мы имеем в силу (12)

$$\iint [S(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dx dy < \varepsilon.$$

где Φ_n определено формулой (10). Согласно (3), получаем неравенство

$$\iint [K(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dx dy < \varepsilon$$

для n , больших некоторого n_0^* . Следовательно, если

$$n > \max(n_0, n_0^*),$$

то

$$\iint [S(x, y) - K(x, y)]^2 dx dy \leq 2 \iint [S(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dx dy + 2 \iint [K(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dx dy < 4\epsilon.$$

Таким образом, $S(x, y) \equiv K(x, y)$ почти всюду в квадрате $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

Другим важным следствием утверждения (3) является следующее необходимое и достаточное условие замкнутости системы собственных функций:

L_2 -функция $w(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_h(x)$ симметричного ядра $K(x, y)$ тогда и только тогда, когда

$$\int K(x, y) w(y) dy = 0, \quad (14)$$

т. е. тогда и только тогда, когда функция w «ортогональна к самому ядру $K(x, y)$ ».

В самом деле, имеем тождественно

$$\begin{aligned} & \int \varphi_h(x) dx \int K(x, y) w(y) dy = \\ &= \int w(y) dy \int K(x, y) \varphi_h(x) dx = \\ &= \lambda_h^{-1} \int w(y) \varphi_h(y) dy \quad (h = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, если (14) имеет место, то

$$\int w(x) \varphi_h(x) dx = 0 \quad (h = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Обратно, если выполняются условия (16), то для каждого целого положительного числа n

$$I = \int K(x, y) w(y) dy = \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)] w(y) dy;$$

поэтому

$$I^2 \leq \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dy \int w^2(y) dy.$$

Обозначая последний интеграл через W и используя (3),

получаем, что для достаточно большого n

$$I^2 \leq W\varepsilon$$

(ε имеет обычный смысл). Следовательно, $I = 0$ и теорема доказана.

3.10. Теорема Гильберта — Шмидта и ее приложения

Используя результаты предыдущего параграфа, мы можем теперь легко доказать следующую важную теорему:

Теорема Гильберта — Шмидта. *Если функцию $f(x)$ можно представить в виде*

$$f(x) = \int K(x, y) g(y) dy, \quad (1)$$

где $K(x, y)$ — симметричное L_2 -ядро и $g(y)$ — некоторая L_2 -функция, то $f(x)$ может быть также представлена своим рядом Фурье относительно ОН-системы $\{\varphi_h\}$ собственных функций ядра $K(x, y)^1$, т. е. мы можем написать

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \varphi_h(x), \quad (2)$$

где

$$a_h = \int f(x) \varphi_h(x) dx \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Если, кроме того, $K \in L_2^*$, т. е. если функция $A(x)$, соответствующая ядру K , ограничена:

$$\int K^2(x, y) dy = A^2(x) \leq N^2 \quad (N = \text{const}), \quad (4)$$

то ряд (2) сходится абсолютно и равномерно для каждой функции $f(x)$ вида (1). Если же $K \in L_2$, то ряд (2) сходится почти равномерно в смысле § 2.1²).

¹) Для этого условие (1) достаточно, но не необходимо. Этот вопрос связан с уравнениями Фредгольма первого рода, которые мы рассмотрим позже (§ 3.15).

²) Напомним, что это означает, что частичные суммы имеют мажоранту, которая является L -функцией; важнейшим следствием этого факта является возможность почленного интегрирования ряда (фундаментальная теорема Лебега).

Для доказательства первой части теоремы достаточно заметить, что, согласно (3.9.15),

$$\begin{aligned} b_h &\equiv \int g(x) \varphi_h(x) dx = \\ &= \lambda_h \int f(x) \varphi_h(x) dx = a_h \lambda_h \quad (h = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

и, следовательно, для каждого целого положительного n мы имеем [используя обозначение (3.9.10)]

$$\begin{aligned} f(x) &= \int K(x, y) g(y) dy = \\ &= \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)] g(y) dy + \\ &+ \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h(x)}{\lambda_h} \int \varphi_h(y) g(y) dy = \\ &= \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)] g(y) dy + \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x). \end{aligned}$$

Поэтому в силу неравенства Буняковского — Шварца мы можем написать

$$\left[f(x) - \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x) \right]^2 \leq \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dy \int g^2(y) dy.$$

откуда вытекает в силу (3.9.3), что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x) - \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x) \right]^2 &\leq \\ &\leq \int_0^1 g^2(y) dy \lim_{n \rightarrow \infty} \int [K(x, y) - \Phi_n(x, y)]^2 dy = 0, \end{aligned}$$

т. е. что равенство (2) имеет место. Далее, если наше ядро является L_2^* -ядром и если мы воспользуемся нера-

венством Буняковского — Шварца для суммы¹⁾, то для любого целого положительного n получим

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h \varphi_h(x)| \right]^2 = \\ &= \left[\sum_{h=n+1}^{\infty} \left| b_h \frac{\varphi_h(x)}{\lambda_h} \right| \right]^2 \leq \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h^2} \sum_{h=n+1}^{\infty} b_h^2, \end{aligned}$$

а значит и подавно

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h \varphi_h(x)| \leq N \left[\sum_{h=n+1}^{\infty} b_h^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

поскольку из соотношений (3.9.2), неравенства Бесселя (3.2.8) и условия (4) следует, что

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h^2} \leq \int K^2(x, y) dy = A^2(x) \leq N^2.$$

Так как $g(x)$ принадлежит классу L_2 , ряд $\sum b_h^2$ сходится. Поэтому для любого положительного ε можно найти такое n_0 , не зависящее от x , что при $n > n_0$ мы будем иметь

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} b_h^2 < \varepsilon^2 \quad (n > n_0),$$

и из неравенства (6) следует, что

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h \varphi_h(x)| < N\varepsilon.$$

Это показывает, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно.

¹⁾ Мы имеем в виду хорошо известное неравенство (см. Харди, Литтлвуд и Поля [15], стр. 28)

$$\left(\sum_{h=1}^n a_h b_h \right)^2 \leq \sum_{h=1}^n a_h^2 \sum_{h=1}^n b_h^2,$$

которое иногда называется *неравенством Коши*. Оно справедливо даже при $n = \infty$, если только оба ряда в правой части сходятся.

Остается показать, что если ядро $K(x, y)$ принадлежит только классу L_2 , то ряд (2) сходится почти равномерно, т. е. что его частные суммы ограничены функцией, интегрируемой по Лебегу. Но это очевидно, поскольку, не ссылаясь на условие (4), мы имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_{h=1}^n |a_h \varphi_h(x)| \right]^2 &\leq \sum_{h=1}^n \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h^2} \sum_{h=1}^n b_h^2 \leq \\ &\leq A^2(x) \int g^2(x) dx = A^2(x) \|g\|^2. \end{aligned}$$

Теорема Гильберта — Шмидта легко запоминается, если заметить, что соотношение со знаком Гурвица

$$g(y) \sim \sum_{h=1}^{\infty} b_h \varphi_h(y)$$

(которое, вообще говоря, *не* является равенством) становится равенством (с абсолютной и почти равномерной сходимостью ряда в правой части), если мы умножим обе его части на $K(x, y)$ и проинтегрируем по интервалу $(0, 1)$, поскольку равенство

$$\begin{aligned} &\int K(x, y) g(y) dy = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} b_h \int K(x, y) \varphi_h(y) dy = \sum_{h=1}^n \frac{b_h}{\lambda_h} \varphi_h(x) \end{aligned}$$

— это как раз формула (2). Следует подчеркнуть, что возможность этого преобразования не есть непосредственное следствие аналогичных соображений из § 3.2, поскольку система собственных функций, вообще говоря, *не* является полной.

Теорема Гильберта — Шмидта играет важную роль не только в теории интегральных уравнений, но и в теории ортогональных функций. В числе ее следствий находится и тот важный факт, что в билинейной формуле (3.9.1) имеет место *знак равенства* для всех *итерированных* ядер $K_m(x, y)$ ($m = 2, 3, \dots$). Это очевидно, поскольку по определению

$$K_m(x, y) = \int K(x, z) K_{m-1}(z, y) dz \quad (m = 2, 3, \dots),$$

а это — равенство вида (1) с $g \equiv K_{m-1}$. Коэффициенты Фурье $a_h(y)$ ядра $K_m(x, y)$ (рассматриваемого как функция от x) относительно системы собственных функций ядра $K(x, y)$ равны

$$a_h(y) = \int K_m(x, y) \varphi_h(x) dx = \lambda_h^{-m} \varphi_h(y) \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

ибо (§ 2.5) $\varphi_h(x)$ — собственная функция ядра K_m , соответствующая собственному значению λ_h^m . Следовательно, если симметричное ядро $K(x, y)$ принадлежит классу L_2 , то все соответствующие итерированные ядра $K_m(x, y)$ ($m \geq 2$) могут быть представлены в виде абсолютно и почти равномерно сходящихся рядов

$$K_m(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-m} \varphi_h(x) \varphi_h(y) \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Если ядро $K(x, y)$ принадлежит классу L_2^* , т. е. если удовлетворяется условие (4), то каждый такой ряд сходится равномерно.

В частности, полагая $y = x$, интегрируя в пределах от 0 до 1 и вспоминая (2.5.17), получаем

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-m} = A_m \quad (m = 2, 3, \dots), \quad (8)$$

где A_1, A_2, \dots — следы данного ядра $K(x, y)$. Как мы увидим в § 3.11, это формула весьма важна в практических приложениях теории интегральных уравнений.

Из соотношений (8) следует, что собственные значения любого L_2 -ядра обладают тем свойством, что бесконечный ряд $\sum \lambda_h^{-2}$ сходится. Больше того, это единственное «асимптотическое» свойство, характеризующее собственные значения, в том смысле, что если задана любая последовательность вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, удовлетворяющая этому условию, и любая ОН-система $\{\varphi_h(x)\}$ равномерно ограниченных L_2 -функций¹⁾, то теорема Рисса—

¹⁾ Это означает, что $|\varphi_h(x)| < M$, где M — положительное число, не зависящее ни от h , ни от x . Например, ОН-система (15) (см. ниже) удовлетворяет этому условию.

Фишера обеспечивает сходимость в среднем ряда

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}$$

к симметричной L_2 -функции $K(x, y)$, которая (рассматриваемая как ядро интегрального уравнения Фредгольма) имеет именно числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ в качестве своих собственных значений.

Используем теперь теорему Гильберта — Шмидта для нахождения явного вида решения неоднородного уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (9)$$

где λ не является собственным значением.

Для этого достаточно заметить, что, согласно (9), функция $\varphi(x) - f(x)$ имеет интегральное представление вида (1) и, значит, может быть также представлена в виде абсолютно и почти равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(x) - f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \varphi_h(x),$$

где

$$c_h = \int [\varphi(x) - f(x)] \varphi_h(x) dx = \xi_h - a_h$$

и

$$\xi_h = \int \varphi(x) \varphi_h(x) dx, \quad a_h = \int f(x) \varphi_h(x) dx.$$

Согласно формулам (5),

$$c_h = \lambda \frac{\xi_h}{\lambda_h}.$$

Следовательно, поскольку $\lambda \neq \lambda_h$ ($h = 1, 2, \dots$), имеем

$$\xi_h = \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} a_h, \quad c_h = \frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} a_h$$

и получаем решение нашего уравнения в форме абсолютно и почти равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{\lambda_h - \lambda} \varphi_h(x), \quad (10)$$

который может быть также записан в виде

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{h=1}^{\infty} \int \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda - \lambda_h} f(y) dy. \quad (11)$$

Таким образом, мы видим, что резольвентное ядро $H(x, y; \lambda)$ можно представить изящным рядом

$$H(x, y; \lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda - \lambda_h}, \quad (12)$$

если только этот ряд сходится почти равномерно на основном интервале $(0, 1)$, поскольку тогда можно переставить знаки суммы и интеграла в формуле (11).

Независимо от этого последнего условия, формула (2.1.10) для резольвентного ядра совместно с теоремой Гильберта–Шмидта дает нам абсолютно и почти равномерно сходящееся разложение

$$H(x, y; \lambda) = -K(x, y) + \lambda \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h(\lambda - \lambda_h)}. \quad (12')$$

Это разложение показывает, что особые точки резольвентного ядра H , соответствующего симметричному L_2 -ядру $K(x, y)$, являются простыми полюсами.

Теоремой Гильберта–Шмидта можно также воспользоваться для доказательства того, что дважды дифференцируемые функции могут быть разложены в ряд Фурье в обычном смысле, т. е. в сходящийся тригонометрический ряд.

Точнее, формулируя наше предложение в таком виде, который позволит нам избежать некоторых второстепенных затруднений, мы можем доказать следующую теорему:

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в основном интервале $(0, 1)$, если ее вторая производная $f''(x)$

принадлежит классу L_2 и $f(0) = f(1) \equiv 0$, то $f(x)$ допускает абсолютно и равномерно сходящееся разложение

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \sin(h\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (13)$$

где

$$\alpha_h = 2 \int_0^1 f(x) \sin(h\pi x) dx \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Замечая, что $\alpha_h/\sqrt{2}$ являются коэффициентами Фурье данной функции $f(x)$ относительно ОН-системы функций

$$\sqrt{2} \sin(\pi x), \sqrt{2} \sin(2\pi x), \sqrt{2} \sin(3\pi x), \dots, \quad (15)$$

мы можем рассматривать указанное предложение как непосредственное следствие теоремы Гильберта — Шмидта,

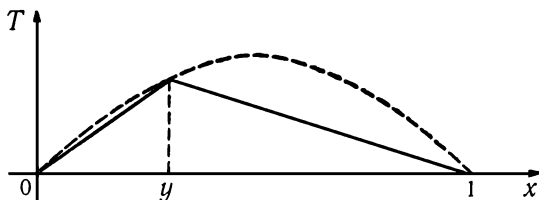


Рис. 7.

если нам удастся построить L_2^* -ядро $K(x, y)$ с собственными функциями (15), при помощи которого любая функция, удовлетворяющая приведенным выше условиям, может быть представлена в виде интеграла типа (1).

Это можно сделать при помощи *треугольного ядра*

$$T(x, y) = \begin{cases} (1-x)y & (0 \leq y \leq x \leq 1), \\ x(1-y) & (0 \leq x \leq y \leq 1), \end{cases} \quad (16)$$

которое принадлежит классу L_2^* (и даже непрерывно). Оно изображено на рис. 7, причем пунктиром проведена парабола, представляющая собой график функции

$$T(x, x) = x(1-x).$$

Поскольку равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 T(x, y) \varphi(y) dy &= (1-x) \int_0^x y \varphi(y) dy + x \int_x^1 (1-y) \varphi(y) dy = \\ &= \int_0^x y \varphi(y) dy + x \int_x^1 \varphi(y) dy - x \int_0^1 y \varphi(y) dy \end{aligned}$$

выполняется тождественно, то мы получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 T(x, y) \varphi(y) dy = \int_x^1 \varphi(y) dy - \int_0^1 y \varphi(y) dy$$

и

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^1 T(x, y) \varphi(y) dy = -\varphi(x). \quad (17)$$

Следовательно, однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 T(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \lambda \varphi(x) = 0 \quad (18)$$

и краевым условиям

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (19)$$

которые вытекают из того, что $T(0, y) \equiv T(1, y) \equiv 0$. Единственными решениями уравнения (18), удовлетворяющими первому из условий (19), являются функции $C \sin(\sqrt{\lambda}x)$; эти функции удовлетворяют второму из условий (19) тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\lambda} = h\pi,$$

где h — любое целое число; следовательно, собственными значениями ядра $T(x, y)$ являются числа

$$\lambda_1 = \pi^2, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2, \quad \lambda_3 = (3\pi)^2, \dots,$$

и соответствующие (нормированные) собственные функции совпадают, как и требовалось, с функциями (15).

Кроме того,

$$T(x, y) = 2 \sum_{h=1}^n \frac{\sin(h\pi x) \sin(h\pi y)}{(h\pi)^2}, \quad (20)$$

поскольку ряд в правой части, очевидно, сходится равномерно.

Наконец, заметим, что любую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы, можно записать в виде (1). В самом деле, из соотношения (17) вытекает, что

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\int_0^1 T(x, y) f''(y) dy + f(x) \right] \equiv 0;$$

следовательно, в силу условий при $x=0$ и $x=1$, имеем

$$f(x) = - \int_0^1 T(x, y) f''(y) dy. \quad (21)$$

Полагая в формуле (20) $y=x$ и интегрируя от 0 до 1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \int_0^1 \sin^2(h\pi x) dx &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \int_0^1 T(x, x) dx = \\ &= \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (22)$$

Это хорошо известный, но нетривиальный результат, которым мы уже воспользовались при доказательстве полноты системы тригонометрических функций.

3.11. Экстремальные свойства и оценки собственных значений

Теория интегральных уравнений с симметричным ядром тесно связана не только с теорией систем линейных алгебраических уравнений, но также и с теорией квадратичных форм и с вариационным исчислением. Точнее, она связана с экстремальной задачей для двойного интеграла Гильберта

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy. \quad (1)$$

Этот двойной интеграл называется иногда *квадратичной формой с бесконечным числом переменных*, поскольку его можно рассматривать как предельный случай при $n \rightarrow \infty$ квадратичной формы

$$\sum_{r,s=1}^n k_{rs} x_r x_s, \quad (2)$$

где

$$k_{rs} = k_{sr} = \frac{1}{n^2} K\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right), \quad x_r = \varphi\left(\frac{r}{n}\right), \quad (r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Этот факт является источником многих идей, например идеи нахождения аналога процесса приведения квадратичной формы к *каноническому виду* $\sum \alpha_r x_r^2$. Таким аналогом служит *формула Гильберта*

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h^2}{\lambda_h}, \quad a_h = \int \varphi_h(x) \varphi(x) dx, \quad (3)$$

где λ_h и $\varphi_h(x)$ — соответственно, собственные значения и собственные функции L_2 -ядра $K(x, y)$.

В самом деле, в силу теоремы Гильберта — Шмидта имеем

$$\int K(x, y) \varphi(y) dy = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{\lambda_h} \varphi_h(x),$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и почти равномерно. Умножая это равенство на $\varphi(x)$ и интегрируя его от 0 до 1, непосредственно получаем формулу

(3). Аналогично, если мы рассмотрим *билинейную* форму

$$J(\varphi, \psi) \equiv \iint K(x, y) \varphi(x) \psi(y) dx dy,$$

то получим

$$J(\varphi, \psi) = J(\psi, \varphi) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h b_h}{\lambda_h},$$

где

$$a_h = \int \varphi(x) \varphi_h(x) dx, \quad b_h = \int \psi(x) \varphi_h(x) dx.$$

Если мы отождествим произвольную L_2 -функцию $\varphi(x)$ с собственной функцией $\varphi_m(x)$, то из формулы (3) получим

$$J(\varphi_m, \varphi_m) = \frac{1}{\lambda_m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

и, в частности,

$$J(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\lambda_1}. \quad (4')$$

С другой стороны, так как

$$\frac{1}{|\lambda_1|} \geq \frac{1}{|\lambda_2|} \geq \frac{1}{|\lambda_3|} \geq \dots,$$

то из формулы (3) и неравенства Бесселя следует, что

$$J(\varphi, \varphi) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h^2}{|\lambda_h|} \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \int \varphi^2(x) dx,$$

т. е.

$$|\lambda_1| \leq \frac{\|\varphi\|^2}{J(\varphi, \varphi)} \quad (5)$$

и, в частности,

$$|\lambda_1| \leq [J(\varphi, \varphi)]^{-1}, \quad (6)$$

если только $\varphi(x)$ нормирована, т. е. если

$$\int \varphi^2(x) dx = 1.$$

Соотношения (6) и (4') показывают, что $|J(\varphi, \varphi)|$ обладает максимальным значением в пространстве L_N нормированных L_2 -функций и что это максимальное значение достигается при $\varphi \equiv \varphi_1$ и равно $|\lambda_1|^{-1}$. Иными словами, мы получили важную формулу:

$$|\lambda_1|^{-1} = \max |J(\varphi, \varphi)| \quad (\varphi \in L_N). \quad (7)$$

Аналогично, рассматривая пространство $L_{N,m}$ — совокупность L_2 -функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих m условиям

$$\int \varphi^2(x) dx = 1, \quad (\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_2) = \dots = (\varphi, \varphi_{m-1}) = 0, \quad (8)$$

и учитывая условие (4), получаем

$$\begin{aligned} |J(\varphi, \varphi)| &= \left| \sum_{h=m}^{\infty} \frac{a_h^2}{\lambda_h} \right| \leq \sum_{h=m}^{\infty} \frac{a_h^2}{|\lambda_h|} \leq \frac{1}{|\lambda_m|} \sum_{h=m}^{\infty} a_h^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_m|} \int \varphi^2(x) dx = \frac{1}{|\lambda_m|}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем написать

$$|\lambda_m|^{-1} = \max |J(\varphi, \varphi)| \quad (\varphi \in L_{N,m}; m = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Несмотря на свою простоту, полученные результаты имеют первостепенное значение. Например, заметим (следуя Куранту²⁾), что во многих случаях *собственные частоты* $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ механической колебательной системы (например, колеблющаяся балка, звонок и т. д.) пропорциональны (как и в случае балки, § 1.10) квадратным корням из (положительных) собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ некоторого уравнения Фредгольма второго рода, причем неизвестная функция $\varphi(x)$ пропорциональна амплитуде колебаний точки x системы.

Следовательно, в силу (9) m -я собственная частота ν_m определяется формулой

$$\nu_m = C_m [\max |J(\varphi, \varphi)|]^{-1/2}, \quad (10)$$

¹⁾ Однако, если число собственных значений бесконечно, $J(\varphi, \varphi)$ не обладает минимальным значением; в этом случае *нижняя грань* $J(\varphi, \varphi)$ равна нулю.

²⁾ Курант и Гильберт [27], т. I, гл. 6.

где S_m — постоянная, а φ изменяется в соответствующем функциональном пространстве S_m . Это пространство обычно уже предыдущего пространства $L_{N,m}$, поскольку дополнительно к условиям (8) нужны, вообще говоря, некоторые другие условия, например непрерывность функции φ , если колеблющееся тело монолитно. Если же колеблющееся тело имеет трещину вдоль некоторой линии l , то должны быть допущены к сравнению также функции φ , разрывные вдоль l , так что пространство S_m должно быть заменено более широким пространством S'_m . Тогда мы будем иметь

$$\max_{\varphi \in S'_m} |J(\varphi, \varphi)| \geq \max_{\varphi \in S_m} |J(\varphi, \varphi)|,$$

а также

$$\nu'_m \leq \nu_m,$$

где ν'_m — соответствующая собственная частота системы «с трещиной». Это объясняет тот общеизвестный факт, что треснувший колокол, треснувшая фарфоровая тарелка и др. издают более низкий звук, чем целые!

Однако если наложены дополнительные связи, например, если некоторые точки колебательной системы закреплены, то пространство S_m должно быть заменено более узким пространством S''_m и, следовательно (в очевидных обозначениях), $\nu''_m \geq \nu_m$, что объясняет другое часто наблюдаемое явление!

Еще одним важным следствием предыдущих результатов является неравенство

$$|\lambda_m| \leq |J(\varphi_0, \varphi_0)|^{-1}, \quad (11)$$

где φ_0 обозначает любую L_2 -функцию, удовлетворяющую условиям (8), а также (возможно) другим условиям, связанным с характером задачи.

В частности,

$$|\lambda_1| \leq |J(\varphi_0, \varphi_0)|^{-1}, \quad (12)$$

где φ_0 обозначает произвольную нормированную L_2 -функцию; это неравенство или эквивалентное неравенство (5) в дополнение к (3.8.10) дает нам легко подсчитываемую оценку сверху для первого собственного значения, которое часто наиболее важно.

Например, в случае *треугольного ядра* $T(x, y)$, первое собственное значение которого равно

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9,86960,$$

формула (3.8.10) дает нам оценку

$$\lambda_1 < \sqrt{105} = 10,2470, \quad (13)$$

тогда как, согласно формуле (12) при $\varphi_0 \equiv 1$,

$$\lambda_1 < 12, \quad (14)$$

поскольку

$$J(1, 1) = \int_0^1 \left[(1-x) \int_0^x y dy + x \int_x^1 (1-y) dy \right] dx = \frac{1}{12}.$$

В этом случае, как часто бывает и при других обстоятельствах, приближение, даваемое формулой (3.8.10), лучше приближения, даваемого формулой (12), пока мы пользуемся грубым приближением $\varphi_0 \equiv 1$ в качестве первой собственной функции.

Приближение, доставляемое формулой (12), может быть существенно улучшено при помощи одной идеи Ритца, которая состоит в использовании нормированной функции $\varphi_0 = \varphi_0(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, содержащей конечное число неопределенных параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, и определении этих параметров на основании обычной теории минимумов и максимумов функций многих переменных из условия

$$J(\varphi_0, \varphi_0) = \max.$$

В случае треугольного ядра мы можем отождествить φ_0 с нормированной кусочно-постоянной функцией $\varphi_0(x, \xi)$, представленной на рис. 8. При помощи элементарных вычислений находим выражение

$$J(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{12} (1 + 2\xi - 8\xi^2) \quad \left(0 \leq \xi < \frac{1}{2} \right),$$

которое достигает своего максимального значения $3/32$ в точке $\xi = 1/8$. Следовательно, мы получаем новую оценку

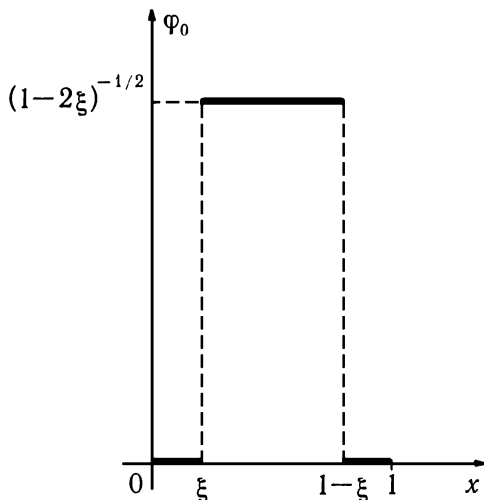
$$\lambda_1 < \frac{32}{3} = 10,666\dots, \quad (15)$$

более точную, чем предыдущая оценка (14).

Конкретно в методе Ритца используется следующая функция:

$$\varphi_0 = \xi_1 \psi_1(x) + \xi_2 \psi_2(x) + \dots + \xi_n \psi_n(x) \\ (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1),$$

где $\{\psi_h\}$ — любая ОН-система функций на основном интервале $(0,1)$. Этот метод дает хорошие численные результаты (особенно при вычислении *первого* собственного зна-



Р и с. 8.

чения λ_1), если система $\{\psi_h\}$ не «слишком сильно отличается» от системы собственных функций ядра $K(x, y)$ ¹⁾. Вычисление дальнейших собственных значений, вообще говоря, представляет собой более сложную задачу, несмотря на то, что трудность, вызванную присутствием в дополнительных условиях (8) первых $m-1$ собственных функций, как показал Курант²⁾, можно обойти.

¹⁾ Формула (12) дает *точное* значение λ_1 , если положить $\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x)$; однако собственная функция $\varphi_1(x)$, вообще говоря, неизвестна.

²⁾ Курант и Гильберт [27] т. 1, стр. 342).

Все предыдущие оценки были оценками собственных значений *сверху*. Оценку *снизу* для первого собственного значения λ_1 (соответственно для λ_n , если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ уже известны) легко можно вывести из встречавшейся ранее формулы (3.10.8)¹⁾. Ибо, пренебрегая всеми членами ряда (3.10.8), начиная со второго (обычно они достаточно малы), мы получаем

$$|\lambda_1|^{-m} \leq |A_m| = \left| \int K_m(x, x) dx \right|,$$

т. е.

$$|\lambda_1| \geq |A_m|^{-1/m} \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (16)$$

Например, в случае треугольного ядра в силу формулы

$$T_m(x, y) = 2\pi^{-2m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m} \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) \quad (17)$$

получаем следующую оценку снизу:

$$\lambda_1 > \left[\pi^{-2m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m} \right]^{-1/m} = \frac{1}{4} \left[\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!} B_{2m} \right]^{-1/m} \\ (m = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

где B_{2m} — числа Бернулли²⁾. В частности, при $m = 1, 2, 3$ имеем последовательно улучшающиеся оценки

$$\lambda_1 > 6, \quad \lambda_1 > \sqrt[3]{90} = 9,4868, \quad \lambda_1 > \sqrt[3]{945} = 9,8132. \quad (19)$$

Попутно получается следующая интересная формула:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!} B_{2m} \right]^{-1/m} = 4\pi^2. \quad (20)$$

Иногда приближение, получаемое из формулы (16), может быть существенно улучшено, если вместо простого отбрасывания суммы $\lambda_2^{-m} + \lambda_3^{-m} + \dots$ в ряде (3.10.8) мы подставим приближенные значения для $\lambda_2, \lambda_3, \dots$. Эти приближенные значения можно получить, например,

¹⁾ Помимо очевидной оценки $|\lambda_1| \geq \|K\|^{-1}$.

²⁾ См., например, Кноп [22], стр. 182, 239. Можно рассматривать даже значение $m=1$, поскольку ядро T положительно (см. следующий параграф).

используя несколько упрощенную постановку исходной задачи¹⁾.

В любом случае более удобный способ получения приближенных значений для первого собственного значения состоит в использовании двойного неравенства

$$|A_m|^{-1/m} \leq |\lambda_1| \leq \sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}} \quad (m = 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots), \quad (21)$$

которое является одним из наиболее часто применяемых в прикладной математике результатов теории интегральных уравнений. Это неравенство можно также использовать для оценок последующих собственных значений, если только мы в состоянии приближенно подсчитать первую собственную функцию $\varphi_1(x)$. При помощи этой функции мы можем «устранить» первое собственное значение λ_1 из числа собственных значений ядра $K(x, y)$, построив, «укороченное» ядро

$$K^{(2)}(x, y) = K(x, y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}$$

и т. д. (ср. § 3.8).

3.12. Положительные ядра; теорема Мерсера

Основная формула Гильберта

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h^2}{\lambda_h}, \quad a_h = \int \varphi(x) \varphi_h(x) dx, \quad (1)$$

и ее следствие

$$J(\varphi_h, \varphi_h) = \frac{1}{\lambda_h} \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

показывают, что для неотрицательности квадратичной формы $J(\varphi, \varphi)$ в пространстве L_2 , т. е. для справедливости неравенства

$$J(\varphi, \varphi) \geq 0 \quad (\varphi \in L_2) \quad (3)$$

¹⁾ По этому поводу см. Краль и Эйноуди [26], т. 2, стр. 239.

необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ядра $K(x, y)$ были положительны, т. е.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad (4)$$

В этом случае ядро $K(x, y)$ называется *положительным* ядром. Ядро называется *положительно определенным*, если

$$J(\varphi, \varphi) > 0, \quad (5)$$

когда скоро $\|\varphi\| > 0$.

Добавочным условием, обеспечивающим *положительную определенность* ядра, является, очевидно, *замкнутость* системы собственных функций ядра, т. е. замкнутость самого ядра (§ 3.9).

Значения положительного ядра не обязательно все положительны¹⁾; однако если ядро $K(x, y)$ *непрерывно*, по крайней мере в окрестности диагонали $x = y$ основного квадрата $S \equiv (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$, то значения его на этой диагонали обязательно *неотрицательны*, т. е.

$$K(x, x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (6)$$

В самом деле, предположим, что

$$K(x_0, x_0) < 0 \quad (0 < x_0 < 1)$$

(если $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$, то последующее рассуждение должно быть незначительно изменено очевидным образом). Тогда, так как $K(x, y)$ по предположению непрерывно в окрестности точки $x = y = x_0$, мы можем найти положительное δ , настолько малое, что квадрат

$$S_\delta = (x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad x_0 - \delta \leq y \leq x_0 + \delta)$$

целиком содержится в S и $K(x, y) < 0$ внутри S_δ .

Следовательно, если

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & (x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta), \\ 0 & (0 \leq x < x_0 - \delta, \quad x_0 + \delta < x \leq 1), \end{cases}$$

¹⁾ Например, значения симметричного ядра $K(x, y) = f(x)f(y)$ могут быть и отрицательными, но это ядро *положительно*, ибо

$$J(\varphi, \varphi) = \left[\int f(x) \varphi(x) dx \right]^2 \geq 0.$$

то обязательно

$$J(\varphi_0, \varphi_0) = \iint_{S_\delta} K(x, y) dx dy < 0.$$

Это противоречит предположению, что $K(x, y)$ — положительное ядро.

Поэтому неравенство (6) представляет собой *необходимое* (но не достаточное) условие положительности *непрерывного* ядра $K(x, y)$.

Из этого условия следует теорема Мерсера.

Теорема Мерсера. Если симметричное L_2 -ядро $K(x, y)$ непрерывно и обладает лишь положительными собственными значениями (или самое большее конечным числом отрицательных собственных значений), то ряд

$$\sum \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}$$

сходится абсолютно и равномерно и справедлива билинейная формула

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}. \quad (7)$$

В силу одного результата из § 3.9 доказательство теоремы сводится к доказательству равномерной сходимости ряда (7). Так как на сходимость не влияет отбрасывание конечного числа начальных членов, то без ограничения общности можно считать, что *все* собственные значения ядра $K(x, y)$ положительны, т. е. что ядро $K(x, y)$ *положительно*. Если ядро $K(x, y)$ положительно и непрерывно, то «укороченное» ядро

$$K^{(m+1)}(x, y) = K(x, y) - \sum_{h=1}^m \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h}$$

также *положительно* и непрерывно для любого m ¹⁾.

¹⁾ Напомним, что, согласно формулам § 2.5, собственные функции непрерывного ядра сами непрерывны.

Поэтому в силу (6) имеем

$$K(x, x) - \sum_{h=1}^m \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h} = K^{(m+1)}(x, x) \geq 0,$$

т. е.

$$\sum_{h=1}^m \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h} \leq K(x, x) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Это показывает, что ряд $\sum \varphi_h^2(x) \lambda_h^{-1}$, члены которого положительны, сходится.

Но для любой пары целых положительных чисел n, p неравенство Буняковского—Шварца для сумм дает

$$\left[\sum_{h=n+1}^{n+p} \left| \frac{\varphi_h(x) \varphi_h(y)}{\lambda_h} \right| \right]^2 \leq \sum_{h=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h} \sum_{h=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_h^2(y)}{\lambda_h}. \quad (7')$$

Поэтому при фиксированном y ряд $\sum \varphi_h(x) \varphi_h(y) \lambda_h^{-1}$ сходится абсолютно и равномерно относительно x , а при фиксированном x — абсолютно и равномерно относительно y . Этого достаточно, чтобы установить справедливость билинейной формулы (7) и, в частности, формулы

$$K(x, x) = \sum \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h}.$$

Более того, так как, в силу теоремы Дини¹⁾, сходимость последнего ряда равномерна, то ряд $\sum \varphi_h(x) \varphi_h(y) \lambda_h^{-1}$ сходится равномерно даже тогда, когда изменяются одновременно x и y .

Эта теорема весьма ценна, так как во многих механических или физических задачах, приводящих к уравнениям Фредгольма с симметричными ядрами, положительность ядра является непосредственным следствием физического смысла квадратичной формы Гильберта (ср. § 3.14).

¹⁾ *Теорема Дини*: если сумма бесконечного ряда неотрицательных непрерывных функций сама непрерывна на замкнутом интервале, то этот ряд сходится равномерно на этом интервале (см. Кноп [22], стр. 345). [См. также Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., 1951, стр. 454. — Прим. перев.]

Следовательно, в этих случаях билинейную формулу (7) можно применять без каких бы то ни было дальнейших исследований.

Следствие. В предположениях теоремы Мерсера бесконечный ряд $\sum \lambda_h^{-1}$ абсолютно сходится. При этом

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-1} = A_1 = \int K(x, x) dx, \quad (8)$$

и выведенную раньше формулу (3.11.16) можно применять даже для $m=1$.

Нужно отметить, что доказанную ранее формулу (3.10.22) можно рассматривать как применение этого следствия к треугольному ядру $T(x, y)$.

Наконец, отметим, что первое итерированное ядро $K_2(x, y)$ всегда положительно, ибо $\lambda_h^2 > 0$. Обратно, любое положительное непрерывное ядро $K(x, y)$ с положительными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и собственными функциями $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ можно рассматривать как первое итерированное ядро симметричного ядра

$$K^*(x, y) = \text{l.i.m.}_{h \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \lambda_h^{-1/2} \varphi_h(x) \varphi_h(y),$$

которое существует, ибо, как мы только что видели, бесконечный ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} [\lambda_h^{-1/2} \varphi_h(x)]^2$$

всегда сходится.

3.13. Связь с теорией линейных дифференциальных уравнений

Аналогично тому, как линейное дифференциальное уравнение

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (1)$$

с классическими начальными условиями

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (2)$$

приводит к интегральному уравнению Вольтерра (§ 1.8), это же дифференциальное уравнение при добавочных условиях на *обоих* концах $x=0$ и $x=1$ основного интервала $(0,1)$, вообще говоря, приводит к интегральному уравнению Фредгольма.

Весьма общий класс таких добавочных условий можно получить, потребовав, чтобы n линейных комбинаций $2n$ величин

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0); y(1), y'(1), \dots, y^{(n-1)}(1)$$

принимали заданные значения, т. е. чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{hk} y^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{hk} y^{(k)}(1) = c_h \quad (h=0, 1, \dots, n-1), \quad (3)$$

где a_{hk} , b_{hk} и c_h — заданные постоянные. Мы, очевидно, исключаем случай, когда все a_{hk} и все b_{hk} равны нулю для некоторого h . Можно, однако, предположить, что $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$, т. е. без ограничения общности можно рассматривать *однородные* краевые условия

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{hk} y^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{hk} y^{(k)}(1) \quad (h=0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

Это ясно, ибо, если $y(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3), а $f_0(x)$ — произвольная (n раз дифференцируемая) функция, удовлетворяющая условиям (3), и если $y(x) = f_0(x) + Y(x)$, то $Y(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (4) и дифференциальному уравнению (1), только с другой (вообще говоря) правой частью.

Уравнение (1) вместе с краевыми условиями (4) называется *системой Штурма—Лиувилля*. Такая система эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода с довольно простым ядром. В дальнейшем мы ограничимся самым важным случаем $n=2$, в котором исчезает одно формальное затруднение. Относительно случая $n > 2$ см. учебники по дифференциальным уравнениям, например Айнс [2], гл. X—XI.

Трудность, отсутствующая при $n=2$, заключается в необходимости рассматривать наряду с уравнением (1)

сопряженное уравнение ¹⁾. Дифференциальное же уравнение второго порядка всегда может быть приведено к самосопряженному виду ²⁾. Именно при обычном предположении, что $a_0(x) \neq 0$, этого можно добиться, умножив уравнение (1) (в случае $n = 2$) на функцию $p(x)/a_0(x)$, где

$$p(x) = \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx > 0. \quad (5)$$

Будем далее предполагать, что $F(x) \equiv 0$ (это несущественное ограничение ³⁾). Таким образом, мы получим *самосопряженное уравнение*

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = 0, \quad (6)$$

где

$$q(x) = p(x) \frac{a_2(x)}{a_0(x)}. \quad (7)$$

Уравнение (6) называется самосопряженным, потому что, обозначая через $\mathcal{L}[y(x)]$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}[y(x)] \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + q(x) y(x) \quad (8)$$

[т. е. левую часть уравнения (6)], имеем тождественно

$$\begin{aligned} z(x) \mathcal{L}[y(x)] - y(x) \mathcal{L}[z(x)] &= \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \left[z(x) \frac{dy(x)}{dx} - y(x) \frac{dz(x)}{dx} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

(В случае несамосопряженного уравнения аналогичное тождество требует введения *двух* дифференциальных операторов \mathcal{L} и, скажем, \mathcal{M} в левую часть.)

Краевые условия (4) можно записать в простом виде

$$\mathcal{A}_h[y(0)] = \mathcal{B}_h[y(1)] \quad (h = 0, 1), \quad (10)$$

если ввести дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h[y(x)] &= a_{h0} y(x) + a_{h1} y'(x), \\ \mathcal{B}_h[y(x)] &= b_{h0} y(x) + b_{h1} y'(x) \quad (h = 0, 1) \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, Айнс [2] стр. 165. Однако в дальнейшем знакомство с сопряженным оператором не требуется.

²⁾ Айнс [2] стр. 290.

³⁾ Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения можно квадратурами свести к решению соответствующего однородного уравнения. См. также формулу (30).

и сокращенные обозначения

$$\mathcal{A}_h[y(x_0)] \equiv \{\mathcal{A}_h[y(x)]\}_{x=x_0}, \quad \mathcal{B}_h[y(x_0)] \equiv \{\mathcal{B}_h[y(x)]\}_{x=x_0}.$$

В общем случае система Штурма—Лиувилля (6)+(10) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. В самом деле, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (6) и его общее решение записывается в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

то задача определения постоянных C_1 и C_2 из краевых условий (10) приводит к алгебраической системе однородных уравнений

$$\begin{cases} C_1 \{\mathcal{A}_0[y_1(0)] - \mathcal{B}_0[y_1(1)]\} + C_2 \{\mathcal{A}_2[y_2(0)] - \mathcal{B}_0[y_2(1)]\} = 0, \\ C_1 \{\mathcal{A}_1[y_1(0)] - \mathcal{B}_1[y_1(1)]\} + C_2 \{\mathcal{A}_1[y_2(0)] - \mathcal{B}_1[y_2(1)]\} = 0, \end{cases}$$

которая, вообще говоря, допускает лишь решение $C_1 = C_2 = 0$, так как в общем случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_0[y_1(0)] - \mathcal{B}_0[y_1(1)] & \mathcal{A}_0[y_2(0)] - \mathcal{B}_0[y_2(1)] \\ \mathcal{A}_1[y_1(0)] - \mathcal{B}_1[y_1(1)] & \mathcal{A}_1[y_2(0)] - \mathcal{B}_1[y_2(1)] \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

В дальнейших рассуждениях мы будем всегда предполагать, что $\Delta \neq 0$.

Вместо системы (6)+(10) мы будем рассматривать несколько другую систему, состоящую из краевых условий (10) и модифицированного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}[y(x)] + \lambda r(x) y(x) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (12)$$

(содержащего параметр λ).

Возникает вопрос: для каких значений параметра λ система Штурма—Лиувилля (12)+(10) допускает нетривиальные решения?

Исследование этого вопроса, имеющего фундаментальное значение во многих задачах математической физики, механики и др., можно свести к исследованию однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Для этой цели мы воспользуемся формулой Грина (9) и функцией Грина для системы (6)+(10).

Функция Грина $G(x, \xi)$ — это функция переменной x и параметра ξ ($0 < \xi < 1$), удовлетворяющая следующим трем условиям:

(I) $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x , удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) во всех точках интервала $(0, 1)$, за исключением точки $x = \xi$;

(II) $G(x, \xi)$ удовлетворяет обоим краевым условиям (10);

(III) $G(x, \xi)$ непрерывна для $0 \leq x \leq 1$, а ее производная $G'_x(x, \xi)$ непрерывна только для $0 \leq x < \xi$ и $\xi < x \leq 1$ и имеет скачок величины $-1/p(\xi)$ ¹⁾ в точке $x = \xi$, т. е.

$$G'_x(\xi + 0, \xi) - G'_x(\xi - 0, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (13)$$

Если мы умеем находить фундаментальную систему $y_1(x)$, $y_2(x)$ решений уравнения (6)²⁾, то мы легко можем построить функцию Грина: достаточно положить

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi) y_1(x) + C_2(\xi) y_2(x) & (0 \leq x < \xi), \\ D_1(\xi) y_1(x) + D_2(\xi) y_2(x) & (\xi < x \leq 1), \end{cases}$$

где $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$, $D_1(\xi)$ и $D_2(\xi)$ — четыре неизвестные функции ξ , которые надо определить, используя краевые условия (10), условие непрерывности $G(\xi + 0, \xi) = G(\xi - 0, \xi)$ и условие (13). Эти четыре соотношения приводят к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(\xi) \mathcal{A}_0[y_1(0)] + C_2(\xi) \mathcal{A}_0[y_2(0)] - D_1(\xi) \mathcal{B}_0[y_1(1)] - \\ \quad - D_2(\xi) \mathcal{B}_0[y_2(1)] = 0, \\ C_1(\xi) \mathcal{A}_1[y_1(0)] + C_2(\xi) \mathcal{A}_1[y_2(0)] - D_1(\xi) \mathcal{B}_1[y_1(1)] - \\ \quad - D_2(\xi) \mathcal{B}_1[y_2(1)] = 0, \\ -C_1(\xi) y_1(\xi) - C_2(\xi) y_2(\xi) + D_1(\xi) y_1(\xi) + \\ \quad + D_2(\xi) y_2(\xi) = 0, \\ -C_1(\xi) y'_1(\xi) - C_2(\xi) y'_2(\xi) + D_1(\xi) y'_1(\xi) + \\ \quad + D_2(\xi) y'_2(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}, \end{array} \right.$$

¹⁾ Будьте осторожны: некоторые авторы (в том числе и я в своей книге [49]) рассматривают этот скачок с обратным знаком, что приводит к замене G на $-G$.

²⁾ Таким образом, нужно интегрировать уравнение (6), а не (более общее) уравнение (12).

определитель которой равен ¹⁾

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} \Delta$$

и поэтому, в силу (11), отличен от нуля.

Например, функцией Грина для системы Штурма — Лиувилля

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda r(x) y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

является рассмотренное ранее *треугольное ядро* (3.10.16).

Положим теперь $z(x) = G(x, \xi)$ и проинтегрируем обе части тождества (9) по основному интервалу $(0, 1)$. Учитывая разрыв функции G'_x , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{d}{dx} [p(x) y(x) G'_x(x, \xi)] dx = \\ & = [p(x) y(x) G'_x(x, \xi)]_0^1 - p(\xi) y(\xi) [G'_x(\xi + 0, \xi) - \\ & - G'_x(\xi - 0, \xi)] = [p(x) y(x) G'_x(x, \xi)]_0^1 + y(\xi). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int G(x, \xi) \mathcal{L}[y(x)] dx = \left[p(x) \left(G \frac{dy}{dx} - y \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right]_0^1 - y(\xi). \quad (14)$$

Эту формулу можно упростить, заметив, что в силу правила умножения определителей (мы умножаем *строки на столбцы*) будем иметь

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y(0) & z(0) \\ y'(0) & z'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_0[y(0)] & \mathcal{A}_0[z(0)] \\ \mathcal{A}_1[y(0)] & \mathcal{A}_1[z(0)] \end{vmatrix}, \\ & \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y(1) & z(1) \\ y'(1) & z'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_0[y(1)] & \mathcal{B}_0[z(1)] \\ \mathcal{B}_1[y(1)] & \mathcal{B}_1[z(1)] \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Если обе функции y и z удовлетворяют краевым условиям (10), то оба определителя в правых частях равны

¹⁾ Чтобы получить этот результат, нужно только сложить третий столбец с первым, а четвертый со вторым.

между собой и, полагая

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} = B, \quad (15)$$

получаем равенство

$$A[y(0)z'(0) - y'(0)z(0)] = B[y(1)z'(1) - y'(1)z(1)]. \quad (16)$$

Поэтому, отождествляя $z(x)$ с $G(x, \xi)$, можно придать уравнению (14) более простую форму

$$\int G(x, \xi) \mathcal{L}[y(x)] dx = -y(\xi), \quad (17)$$

если только (как это часто бывает) выполнено *основное условие*¹⁾

$$Ap(1) = Bp(0). \quad (18)$$

В этом случае система (12) + (10) приводится к интегральному уравнению Фредгольма, если согласно (12) подставить в уравнение (17) вместо $\mathcal{L}[y(x)]$ выражение $-\lambda r(x)y(x)$. Таким образом, получаем однородное интегральное уравнение

$$y(\xi) - \lambda \int_0^1 G(x, \xi) r(x) y(x) dx = 0. \quad (19)$$

Из-за множителя $r(x)$ ядро этого уравнения несимметрично. Однако функция Грина $G(x, \xi)$ *симметрична*.

В самом деле, если положить

$$y(x) = G(x, \xi), \quad z(x) = G(x, \eta) \quad (\xi \neq \eta)$$

в формуле Грина (9), то интегрирование, аналогичное тому, которое привело нас к равенству (14), дает

$$0 = [p(x)\{G(x, \eta)G'_x(x, \xi) - G(x, \xi)G'_x(x, \eta)\}]_0^1 + \\ + G(\xi, \eta) - G(\eta, \xi).$$

Если основное условие (18) выполнено, то первый член правой части равен нулю, ибо как $G(x, \xi)$, так и $G(x, \eta)$

¹⁾ В том случае, когда выполняется условие (18), Айнс [2], стр. 293, и другие авторы говорят о *самосопряженных краевых условиях*.

удовлетворяют краевому условию (10). Поэтому мы имеем

$$G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi). \quad (20)$$

Если функция $r(x)$ не обращается в нуль, т. е. если

$$r(x) > 0 \quad (21)$$

[если $r(x) < 0$, заменяем $r(x)$ на $-r(x)$ и λ на $-\lambda$], то уравнение (19) можно привести к интегральному уравнению с симметричным ядром, положив

$$y(x) \sqrt{r(x)} = \varphi(x). \quad (22)$$

Возвращаясь к обычным переменным x, y , получаем интегральное уравнение

$$\varphi(y) - \lambda \int K(x, y) \varphi(x) dx = 0 \quad (23)$$

с симметричным ядром

$$K(x, y) = \sqrt{r(x)r(y)} G(x, y). \quad (24)$$

Отсюда и из следующих ниже рассуждений вытекает важная теорема:

Если $r(x) > 0$, если выполняются условия (11), (18) и (21) и если симметричное ядро (24) интегрируемо с квадратом, то система Штурма—Лиувилля (12) + (10) допускает нетривиальные решения только для счетного числа вещественных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ параметра λ , а именно—собственных значений симметричного ядра (24). Каждому собственному значению отвечают самое большее два линейно независимых «собственных решения» системы, связанные с собственными функциями данного ядра равенством (22).

Все собственные значения ядра (24) имеют самое большее кратность 2, ибо невозможно найти более двух линейно независимых решений одного и того же линейного дифференциального уравнения второго порядка. Более того, иногда можно утверждать, что эти собственные значения обязательно *просты*; например, это имеет место, если $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{B}_0 \equiv 0$, т. е. если

$$a_{10} = a_{11} = b_{00} = b_{01} = 0 \quad (25)$$

[это важный случай, когда основное условие (18) выполняется автоматически, так как $A = B = 0$]. В самом деле, существует не более ∞^1 решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющих условию вида

$$a_{00} y(0) + a_{01} y'(0) = 0^1).$$

С другой стороны, заведомо существует бесконечно много собственных значений, ибо иначе существовало бы лишь конечное число собственных функций $\varphi_h(x)$ и соответствующая ОН-система была обязательно неполной, что противоречило бы следующей теореме.

Теорема о полноте. Система собственных функций $\{\varphi_h(x)\}$ системы Штурма — Лиувилля вида (10) + (12) полна во всем пространстве L_2 .

Для доказательства покажем, что:

(I) всякая D_2 -функция [т. е. всякая дважды дифференцируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям (10) и обладающая второй производной, интегрируемой с квадратом] может быть с произвольной степенью точности равномерно приближена линейными комбинациями функций $\varphi_h(x)$;

(II) всякая L_2 -функция может быть с произвольной степенью точности приближена D_2 -функциями.

Для доказательства (I) достаточно заметить, что в силу теоремы Гильберта — Шмидта всякую D_2 -функцию можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида $\sum a_h \varphi_h(x)$, ибо если положить

$$g(x) = \mathcal{L}[f(x)] \equiv \frac{d}{dx} \left(p \frac{df}{dx} \right) + qf,$$

то из равенства (17) следует, что

$$f(x) = - \int G(x, y) g(y) dy,$$

т. е.

$$f(x) = - \frac{1}{\sqrt{r(x)}} \int K(x, y) \frac{g(y)}{\sqrt{r(y)}} dy.$$

¹⁾ Ибо все решения, пропорциональные решению, которое определяется начальными условиями $y(0) = a$, $y'(0) = b$ ($a_{00} a + a_{01} b \neq 0$), не удовлетворяют этому условию.

Чтобы доказать (II), заметим прежде всего, что произвольная L_2 -функция может быть с произвольной степенью точности приближена (в среднем) многочленами, так как система степеней полна на любом конечном интервале (§ 3.5). Далее, каждый многочлен может быть с произвольной степенью точности приближен (в среднем) соответствующими D_2 -функциями. Для этой цели достаточно слегка видоизменить этот многочлен (не нарушая его двукратной дифференцируемости) в произвольно малых окрестностях концов рассматриваемого интервала, чтобы удовлетворить краевым условиям (10).

Теорема о полноте показывает, что класс ядер, порождаемых системами Штурма — Лиувилля, весьма специален, так как, вообще говоря, ничего подобного не наблюдается для произвольных симметричных L_2 -ядер или для симметричных ядер, для которых справедлива теорема Мерсера. Далее, в то время как единственным «асимптотическим свойством» собственных значений λ_n произвольного симметричного L_2 -ядра является сходимость ряда $\sum \lambda_n^{-2}$ (ср. § 3.10), собственные значения систем Штурма — Лиувилля и соответствующие собственные функции обладают весьма точными асимптотическими свойствами. Например, можно показать, что ¹⁾

$$\lambda_n = O(n^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как эти вопросы, собственно говоря, принадлежат теории дифференциальных уравнений (хотя основным методом их исследования является сведение данного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра ²⁾), мы ограничимся изложением (без доказательств) некоторых интересных результатов, относящихся к важному случаю (25). В дальнейшем будем предполагать, что $p(x) \equiv r(x) \equiv 1$, т. е. что дифференциальное уравнение задано в упрощенном виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [q(x) + \lambda] y = 0. \quad (26)$$

¹⁾ См., например, И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1953, § 23. — *Прим. ред.*

²⁾ См., например, Трикоми [47], стр. 175 или Айнс [2] стр. 366.

(Этого всегда можно достигнуть путем элементарных преобразований.)

Полагая

$$\int_0^1 q(x) dx = Q,$$

имеем ¹⁾

$$\sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} n\pi - \frac{\pi}{n} \left(\frac{a_{00}}{a_{01}} - \frac{b_{10}}{b_{11}} + \frac{1}{2} Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01}b_{11} \neq 0), \\ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{n} \left(-\frac{b_{10}}{b_{11}} + \frac{1}{2} Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01} = 0, b_{11} \neq 0), \\ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{n} \left(\frac{a_{00}}{a_{01}} + \frac{1}{2} Q \right) + O(n^{-2}) & (a_{01} \neq 0, b_{11} = 0), \\ (n+1)\pi - \frac{\pi}{2n} Q + O(n^{-2}) & (a_{01} = b_{11} = 0). \end{cases} \quad (27)$$

Для соответствующих собственных функций имеют место формулы ²⁾

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(n\pi x) + O(n^{-1}) & (a_{01}b_{11} \neq 0), \\ \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} = 0, b_{11} \neq 0), \\ \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} \neq 0, b_{11} = 0), \\ \sqrt{2} \sin(n+1)\pi x + O(n^{-1}) & (a_{01} = b_{11} = 0). \end{cases} \quad (28)$$

Наконец, заметим, что, используя функцию Грина $G(x, \xi)$, можно представить решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = f(x), \quad (29)$$

¹⁾ Напомним, что числа a_{ih} , b_{ih} — коэффициенты, входящие в краевые условия (10).

²⁾ В моей книге [47] даны явные выражения для вторых членов (порядка n^{-1}) формул (28), а также асимптотические представления для первых производных $\varphi'_n(x)$ функций $\varphi_n(x)$.

удовлетворяющее краевым условиям (10), в изящной форме

$$y(x) = - \int G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (30)$$

Это является непосредственным следствием равенства (17), ибо уравнение (29) гарантирует, что $\mathcal{L}[y(x)] = f(x)$.

3.14. Критические скорости вращающегося вала и поперечные колебания балки

В главе первой (§ 1.1 и 1.10) мы видели, что обе названные в заглавии механические задачи можно свести к *одному и тому же* однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, а именно к уравнению

$$z(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x, y) \mu(y) z(y) dy = 0. \quad (1)$$

Здесь ω — угловая скорость вала (или, соответственно, угловая частота колебаний балки), $\mu(x)$ — *линейная плотность* (так что масса, заключенная между двумя поперечными сечениями вала в точках x и $x+dx$, равна $\mu(x)dx$) и $G(x, y)$ — *функция влияния*¹⁾. Так как $\mu(x) > 0$, то, полагая

$$\sqrt{\mu(x)} z(x) = \varphi(x), \quad (2)$$

получаем однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \omega^2 \int K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (3)$$

с симметричным ядром

$$K(x, y) = \sqrt{\mu(x)\mu(y)} G(x, y). \quad (4)$$

В силу результатов предыдущего параграфа это достаточно для того, чтобы сделать заключение о существова-

¹⁾ Напомним, что $G(x, y)$ есть смещение (параллельно оси z) поперечного сечения в точке $x=y$, вызванное действием единичной нагрузки, сосредоточенной в точке $x=y$ (и действующей параллельно оси z). Совпадение буквы G с символом функции Грина не случайно, ибо функцию влияния можно рассматривать как функцию Грина дифференциального уравнения четвертого порядка (которое мы здесь не рассматриваем), описывающего колебания балки.

нии бесконечного числа критических скоростей (соответственно, *собственных частот*) $\omega_h = \sqrt{\lambda_h}$, соответствующих (положительным) собственным значениям λ_h симметричного ядра (4).

Далее, мы сейчас можем получить также оценки снизу и сверху для этих собственных значений и т. д. Однако, прежде чем переходить к подробному исследованию, мы отметим несколько общих свойств ядра, *встречающегося в теории упругости*, т. е. функции влияния для балки $G(x, y)$, рассматриваемой как ядро интегрального уравнения Фредгольма¹⁾.

Первым, совсем очевидным, но интересным является то свойство, что *оператор Фредгольма первого рода*

$$\mathcal{F}_x^{(1)}[\varphi(y)] = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy$$

в случае $K \equiv G$ можно рассматривать как функциональный оператор, переводящий распределенную нагрузку $\varphi(x)$, действующую на балку (параллельно оси z), в соответствующее смещение балки, в том смысле, что после деформации ось балки (первоначально совпадающая с отрезком $0 \leq x \leq 1$) будет в плоскости (x, z) кривой, определенной уравнением

$$z = \mathcal{F}_x^{(1)}[\varphi(y)].$$

В качестве следствия получаем, что в данных обстоятельствах теорема Гильберта—Шмидта может быть сформулирована следующим образом:

Любая функция, которую графически можно представить как смещение некоторой балки, подвергнутой действию соответствующей (интегрируемой с квадратом) нагрузки, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям функции влияния для балки.

Важное и интересное толкование имеет также *положительность* ядра $G(x, y)$ (см. § 3.12). В самом деле, квадра-

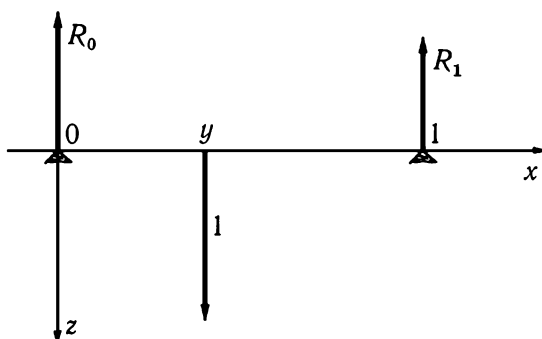
¹⁾ Характер этих свойств позволяет непосредственно распространить их на ядра более общего вида (4).

тичная форма Гильберта

$$J(\varphi, \varphi) = \iint G(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \int \mathcal{F}_x^{(1)}[\varphi(y)] \varphi(x) dx$$

выражает *работу* упругих сил при деформации, вызванной нагрузкой $\varphi(x)$; поэтому ее значения «всегда» положительны.

Поскольку все λ_h положительны, то нет сомнения, что любому собственному значению λ_h интегрального уравне-



Р и с. 9.

ния (3) соответствует *реальная* критическая угловая скорость (соответственно, собственная угловая частота) $\omega_h = \sqrt{\lambda_h}$.

Найдем сейчас функцию влияния $G(x, y)$, начиная со случая балки, *опертой* на обоих концах $x=0$ и $x=1$.

Если R_0 и R_1 обозначают соответственно (заранее неизвестные) реакции в точках опоры, вызванные действием единичной нагрузки в точке $x=y$ (см. рис. 9), то *изгибающий момент* M в точке x балки, очевидно, задается формулой

$$M = \begin{cases} -R_0 x & (0 \leq x \leq y), \\ -R_1 (1 - x) & (y \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Для равновесия системы трех сил R_0 , R_1 и 1 мы должны иметь

$$1 - R_0 - R_1 = 0, \quad R_1 \cdot 1 = 1 \cdot y.$$

Отсюда $R_1 = y$, $R_0 = 1 - y$, и мы видим, что изгибающий момент совпадает с треугольным ядром T из § 3.10 (взятым с обратным знаком), т. е. что

$$M = -T(x, y). \quad (5)$$

Следовательно, функция влияния $G(x, y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению¹⁾

$$E_x I_x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -T(x, y) \quad (6)$$

и соответствующим краевым условиям

$$G(0, y) \equiv G(1, y) \equiv 0, \quad (7)$$

где E_x , I_x обозначают соответственно модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения балки [относительно *нейтральной оси*, перпендикулярной к плоскости (x, z)] в точке x .

Систему (6) + (7) можно изящно решить, если воспользоваться определенным интегралом²⁾

$$T^* = \int_0^1 T(x, z) T(z, y) F(z) dz, \quad (8)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{E_x I_x}. \quad (9)$$

В самом деле, T^* , очевидно, удовлетворяет краевым условиям (7), так как $T(0, y) \equiv T(1, y) \equiv 0$. T^* удовлетворяет также дифференциальному уравнению (6), ибо это *симметричная* функция x и y , имеющая при $x \leq y$

¹⁾ Это так называемое уравнение изгибающего момента; см., например, Prescott J., Applied Elasticity, London, 1924, p. 51.

²⁾ Этот вид решения подсказывается одним общим свойством функции Грина для некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка. На это обстоятельство указывается в моей работе: Tricomi F. G., Sulla funzione di Green di un'equazione differenziale decomposta in fattori simbolici, Atti R. Accad. Sci. Torino, 80 (1944—1945), 156—183.

следующее явное выражение:

$$T^* = xy \int_0^1 (1-z)^2 F(z) dz - x \int_0^y (1-y)(y-z) F(z) dz - \\ - (1-y) \int_0^x z(x-z) F(z) dz,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = y \int_0^1 (1-z)^2 F(z) dz - \int_0^y (1-y)(y-z) F(z) dz - \\ - (1-y) \int_0^x z F(z) dz$$

и

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = -x(1-y)F(x) = -\frac{T(x,y)}{E_x I_x}, \quad x \leq y.$$

Поэтому для случая балки, опертой на концах, получаем

$$G(x, y) = \int_0^1 T(x, z) T(z, y) F(z) dz. \quad (10)$$

Аналогично для балки, заземленной при $x=0$ и свободной при $x=1$, находим

$$M = y - x \quad (0 \leq x \leq y), \quad M = 0 \quad (y \leq x \leq 1);$$

следовательно, имеем

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = (y-x)F(x), \quad G(0, y) \equiv G'_x(0, y) \equiv 0 \quad (0 \leq x \leq y)$$

и, далее,

$$G(x, y) = \int_0^x (x-z)(y-z) F(z) dz. \quad (0 \leq x \leq y).$$

Кроме того, так как $G(x, y) = G(y, x)$, мы можем написать

$$G(x, y) = \int_0^{\min(x, y)} (x-z)(y-z) F(z) dz. \quad (11)$$

Вводя безразмерные функции

$$m(x) = \frac{\mu(x)}{\mu(0)}, \quad f(x) = \frac{F(x)}{F(0)} = \frac{E_0 I_0}{E_x I_x} \quad (12)$$

и полагая

$$\omega^2 \mu(0) F(0) = \lambda, \quad (13)$$

мы можем заключить, что критические угловые скорости ω_h вращающегося вала (или, соответственно, собственные угловые частоты ω_h колеблющейся балки) даются формулой

$$\omega_h = \sqrt{\frac{\lambda_h}{\mu(0) F(0)}} = \sqrt{\frac{E_0 I_0 \lambda_h}{\mu(0)}} \quad (h = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательные собственные значения положительного ядра Фредгольма

$$K'(x, y) = \sqrt{m(x) m(y)} \int_0^1 T(x, z) T(z, y) f(z) dz, \quad (15)$$

если балка оперта, или ядра

$$K''(x, y) = \sqrt{m(x) m(y)} \int_0^{\min(x, y)} (x - z)(y - z) f(z) dz, \quad (16)$$

если один конец ($x = 0$) зашлебен, а второй ($x = 1$) свободен.

Например, в случае опертой однородной балки, т. е. в случае такого ядра (15), для которого $m(x) \equiv f(x) \equiv 1$, имеем в силу (3.11.17)

$$\begin{aligned} K'(x, y) &= \int_0^1 T(x, z) T(z, y) dz = T_2(x, y) = \\ &= \frac{2}{\pi^4} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-4} \sin(h\pi x) \sin(h\pi y), \end{aligned}$$

так что получаем

$$\lambda_h = (\pi h)^4 \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\omega_h = \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \pi^2 h^2 \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

Однако в общем случае или даже в случае (§ 1.10) однородной ($m \equiv f \equiv 1$), но защемленной балки, вообще говоря, уже невозможно получить явные выражения для собственных значений λ_n . Нужно удовлетвориться приближенными вычислениями типа приведенных в § 3.11, результаты которых зачастую достаточно точны для практических целей.

Так, например, в случае *однородной защемленной балки*

$$A_1 = \int_0^1 K''(x, x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{12},$$

$$A_2 = \int_0^1 K_2''(x, x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36} - \frac{x^7}{630} \right) dx = \frac{11}{1680},$$

и поэтому формула (3.11.16) дает нам две разные оценки снизу для первого собственного значения $\lambda_1 = 12,362$ (ср. § 1.10):

$$\lambda_1 > 12, \quad \lambda_1 > \sqrt{\frac{1680}{11}} = 12,358.$$

Вторая оценка достаточно хороша. Несколько лет назад, используя аналогичные методы, я изучил¹⁾ колебания опертой балки, имеющей форму усеченного конуса (сокращенно УК) или клина (сокращенно К).

В этих важных для техники случаях мы соответственно имеем

$$m(x) = (1 - \theta x)^2, \quad f(x) = (1 - \theta x)^{-4} \quad (\text{УК})$$

и

$$m(x) = 1 - \theta x, \quad f(x) = (1 - \theta x)^{-3} \quad (\text{К}),$$

где θ — заданная положительная постоянная, меньшая 1. В обоих случаях дифференциальное уравнение четвертого порядка, которое описывает колебания балки, может быть проинтегрировано в явном виде с помощью бесселевых функций²⁾.

¹⁾ Tricomi F., Sulle vibrazioni trasversali di aste, specialmente di bielle, di sezione variabile, *Ricerche di Ingegneria*, Roma, 4 (1936), 47—53.

²⁾ Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, 1882, S. 339.

Несмотря на это, представляется достаточно трудным получить этим путем простые выражения для собственных значений λ_h . Однако, улучшая формулу (3.11.16) при $m = 1$ (подробности см. в моей цитированной работе), мы получаем простую формулу

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_1'} = \mathcal{T} - \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{\pi^4} \right) (1 - \theta)^p, \quad (19)$$

где $p = 2$ для (УК) и $p = 1$ для (К), а

$$\mathcal{T} = \int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) m(x) f(y) dx dy \quad (20)$$

равно $[90(1 - \theta)]^{-1}$ в случае (УК) и равно

$$-\frac{1}{36\theta^5} [12\theta(1 - \theta) + 7\theta^3 + 3(2 - \theta)(2 - \theta + \theta^2) \ln(1 - \theta)]$$

в случае (К).

С другой стороны, с помощью приемов, аналогичных использованным в § 3.11 при выводе формул (3.11.14) и (3.11.15), легко получаем оценку сверху:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2'' = \begin{cases} \pi^4 \frac{1 - 2\theta + 6H_2\theta^2 - 4H_3\theta^3 + H_4\theta^4}{1 - \theta + H_2\theta^2} & (\text{УК}), \\ \pi^4 \frac{2 - 3\theta + 6H_2\theta^2 - 2H_3\theta^3}{2 - \theta} & (\text{К}), \end{cases} \quad (21)$$

где

$$H_n = 2 \int_0^1 x^n \sin^2 \pi x dx \quad (n = 1, 2, 3, 4). \quad (22)$$

Эти формулы дают хорошие численные результаты, как показывает следующая таблица, взятая из моей упоминавшейся работы:

$\theta \rightarrow$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
УК $\sqrt{\lambda_1'}/\pi^2$	1,0000	0,9383	0,8770	0,8150	0,7523	0,6837	0,6094	0,5269
$\sqrt{\lambda_1''}/\pi^2$	1,0000	0,9509	0,9037	0,8586	0,8161	0,7765	0,7403	0,7079
К $\sqrt{\lambda_1'}/\pi^2$	1,0000	0,9419	0,8836	0,8250	0,7654	0,7014	0,6353	0,5636
$\sqrt{\lambda_1''}/\pi^2$	1,0000	0,9505	0,9022	0,8552	0,8097	0,7660	0,7248	0,6860

Случай шатуна, имеющего форму усеченного конуса, при $\theta = 0,19$ изучался моим покойным коллегой П. Э. Брунелли¹⁾, который *после трех месяцев вычислений* очень остроумным, но чрезвычайно трудоемким «элементарным» методом нашел

$$\sqrt{\lambda_1} = \pi^2 0,8977. \quad (23)$$

Из предыдущих формул мы легко получаем

$$\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\pi^2} = 0,883, \quad \frac{\sqrt{\lambda_1''}}{\pi^2} = 0,908;$$

откуда в среднем

$$\sqrt{\lambda_1} = \pi^2 (0,896 \pm 0,013). \quad (24)$$

При современной вычислительной технике этот трехмесячный срок, конечно, можно сократить, но я полагаю, что предложенный выше метод, приведший к формуле (24), все же короче.

3.15. Симметричные уравнения Фредгольма первого рода

Еще сейчас некоторые математики испытывают своего рода страх, когда им встречается интегральное уравнение Фредгольма *первого* рода

$$\int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

Сегодня этот страх уже ничем не оправдан, особенно если дело касается *симметричного случая* $K(x, y) = K(y, x)$. В этом случае теорема Гильберта — Шмидта позволяет просто и исчерпывающе исследовать уравнение (1) в пространстве L_2 , если только мы умеем определять собственные значения λ_h и собственные функции $\varphi_h(x)$ ядра $K(x, y)$, т. е. если мы полностью овладели соответствующим уравнением *второго* рода

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

¹⁾ Brunelli P. E., Oscillazioni di bielle di sezione variabile, Atti R. Ist. d'Incoraggiamento di Napoli, 1929.

Более точно, рассуждения § 3.10 (теорема Гильберта — Шмидта) показывают, что если уравнение (1) имеет решение $\varphi(x)$ класса L_2 , то

$$a_h = \frac{\xi_h}{\lambda_h} \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\xi_h = \int \varphi(x) \varphi_h(x) dx$$

— неизвестные коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ относительно системы $\{\varphi_h(x)\}$,

$$a_h = \int f(x) \varphi_h(x) dx$$

— соответствующие коэффициенты данной функции $f(x)$, а λ_h — собственные значения ядра $K(x, y)$. Отсюда следует, что

$$\xi_h = a_h \lambda_h. \quad (2)$$

Поэтому, согласно теореме Рисса — Фишера, имеются только две возможности: либо

(I) бесконечный ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \lambda_h^2 \quad (3)$$

расходится и наше уравнение не имеет решения класса L_2 ; либо

(II) ряд (3) сходится и тогда существует по крайней мере одна L_2 -функция $\varphi_0(x)$, удовлетворяющая нашему уравнению, причем ее можно вычислить как предел в среднем

$$\varphi_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n a_h \lambda_h \varphi_h(x). \quad (4)$$

Если система собственных функций $\{\varphi_h(x)\}$ замкнута, т. е. если ядро $K(x, y)$ замкнуто, то функция $\varphi_0(x)$ является *единственным* решением уравнения (1) (с точностью до функций, почти всюду равных нулю). Однако если функции $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ... отличны от нуля почти всюду и ортогональны ко всем функциям $\{\varphi_h\}$, то функция

$\Phi_0(x) + C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x) \dots$, где C_i — произвольные постоянные, также является решением уравнения (1), и обратно.

Например, уравнение первого рода

$$\int_0^1 T(x, y) \Phi(y) dy = f(x) \quad (5)$$

[где $T(x, y)$ — рассмотренное ранее треугольное ядро, для которого (§ 3.10)

$$\lambda_h = (h\pi)^2, \quad \Phi_h(x) = \sqrt{2} \sin(h\pi x) \quad (h = 1, 2, 3, \dots)]$$

имеет единственное решение класса L_2 тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \lambda_h^2 = \pi^2 \sum_{h=1}^{\infty} (h^2 a_h)^2, \quad (6)$$

где

$$a_h = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin(h\pi x) dx.$$

Действительно, это очень жесткие условия!

Аналогично преобразование Пуассона

$$f(\theta) = \frac{1-\varrho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\alpha) d\alpha}{1-2\varrho \cos(\theta-\alpha)+\varrho^2} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < \varrho < 1) \quad (7)$$

(т. е. интеграл Пуассона при фиксированном ϱ) можно обратить в пространстве L_2 тогда и только тогда, когда бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{\varrho^{2n}}, \quad (8)$$

где

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad (9)$$

сходится. В самом деле, симметричное ядро

$$\begin{aligned} K(\theta, \alpha) &= \frac{1-q^2}{2\pi} [1 - 2q \cos(\theta - \alpha) + q^2]^{-1} = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} q^h \cos h(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

на основном интервале $(0, 2\pi)$ имеет собственные значения

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{2h-1} = \lambda_{2h} = q^{-h} \quad (h = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

которым соответствуют собственные функции

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2h-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos hx, \quad \varphi_{2h}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin hx \\ &\quad (h = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как бесконечный ряд (10) абсолютно и равномерно сходится для $|q| < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K(\theta, \alpha) d\alpha &= 1, \quad \int_0^{2\pi} K(\theta, \alpha) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} na d\alpha = q^n \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\theta \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Соответствующий случай интеграла Пуассона для полуплоскости, т. е. интегральное уравнение

$$f(x) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \quad (\eta > 0),$$

рассматривался Г. Батеманом¹⁾.

3.16. Приведение уравнения Фредгольма к уравнению Фредгольма с симметричным ядром

Замечательные свойства уравнений Фредгольма с *симметричным* ядром указывают на целесообразность приведения, по мере возможности, данного интегрального уравнения к уравнению с симметричным ядром. Иногда такое сведение может быть осуществлено с помощью простых

¹⁾ Bateman H., Some integral equations of potential theory, *J. Appl. Phys.*, 17 (1946), 91—102.

приемов, как это мы видели, например, в двух последних параграфах.

В более общем случае, если дано интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

то, умножая его на $K(x, z)$ и интегрируя по x , получаем

$$\begin{aligned} \int K(x, z) \varphi(x) dx - \lambda \int K(x, z) dx \int K(x, y) \varphi(y) dy = \\ = \int K(x, z) f(x) dx. \end{aligned}$$

После тривиальной замены обозначений это можно записать в виде

$$\int [K(y, x) - \lambda K_L(x, y)] \varphi(y) dy = \int K(y, x) f(y) dy, \quad (2)$$

где

$$K_L(x, y) = \int K(z, x) K(z, y) dz \quad (3)$$

— так называемое *левое итерированное* ядро ядра $K(x, y)$, — очевидно, симметрично. Умножая уравнение (2) на $-\lambda$ и затем складывая с (1), получаем новое интегральное уравнение Фредгольма

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int [K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_L(x, y)] \varphi(y) dy = \\ = f(x) - \lambda \int K(y, x) f(y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

ядро которого симметрично, но зависит еще и от параметра λ^1).

¹) Случай, когда ядро зависит от λ , особенно тот случай, когда эта зависимость линейная, изучался Дж. Д. Тамаркиным [Тамаркин J. D., *Ann. Math.*, 28 (1927), 127—152], К. Мирандой [Miranda C., *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 60 (1936), 286—304; *Mem. Accad. Sci. Torino*, 70 (1940), 25—31; *Rend. Accad. Italia*, 2 (1940); *Rend. Semin. Mat. Torino*, 12 (1952—1953), 67—82], Д. Греко [Greco D., *Giorn. Mat. Battaglini*, 78 (1948—1949), 216—237; 79 (1949—1950), 86—120], Р. Иглишем [Iglisch R., *Math. Ann.*, 117 (1939), 129—139] и др.

Аналогично, исходя из сопряженного уравнения

$$\psi(x) - \lambda \int K(y, x) \psi(y) dy = g(x), \quad (5)$$

получаем другое интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\begin{aligned} \psi(x) - \lambda \int [K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_R(x, y)] \psi(y) dy = \\ = g(x) - \lambda \int K(x, y) g(y) dy, \end{aligned} \quad (6)$$

где K_R — правое итерированное ядро

$$K_R(x, y) = \int K(x, z) K(y, z) dz. \quad (7)$$

Значение предыдущих преобразований заключается не столько в получении уравнений (4) и (6), сколько во введении двух симметричных ядер K_L и K_R , связанных с ядром K . Рассмотрение этих ядер позволяет (как заметил Э. Шмидт¹⁾) распространить многие результаты теории интегральных уравнений с симметричными ядрами на уравнения общего вида.

Отметим, что мы уже встречали ядро

$$K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_R(x, y), \quad (8)$$

в § 3.7 (метод Энскогога).

Заметим прежде всего, что оба ядра K_L и K_R положительные, ибо

$$\begin{aligned} & \iint K_L(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \\ &= \iiint K(z, x) K(z, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy dz = \\ &= \int dz \iint K(z, x) K(z, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \\ &= \int \left[\int K(z, x) \varphi(x) dx \right]^2 dz \geq 0, \end{aligned}$$

и аналогично для $K_R(x, y)$.

¹⁾ Schmidt E., *Math. Ann.*, **63** (1907), 433—476; **64** (1907), 161—174; **65** (1908), 370—399.

Далее, легко показать, что ядра K_L и K_R имеют одинаковые (положительные) собственные значения одинаковой кратности. Более точно, если через $v(x)$ обозначить некоторую собственную функцию ядра $K_L(x, y)$, отвечающую собственному значению λ^2 , и положить

$$\mu(x) = \lambda \int K(x, y) v(y) dy, \quad (9)$$

то эта новая функция $\mu(x)$ будет собственной функцией ядра $K_R(x, y)$, отвечающей тому же собственному значению λ^2 . Обратно, если $\mu(x)$ — собственная функция ядра $K_R(x, y)$, отвечающая собственному значению λ^2 , то функция

$$v(x) = \lambda \int K(y, x) \mu(y) dy \quad (10)$$

является собственной функцией ядра $K_L(x, y)$ с тем же собственным значением λ^2 .

В самом деле, из равенства

$$v(x) = \lambda^2 \int K_L(x, y) v(y) dy = \lambda^2 \int K(z, x) dz \times \\ \times \int K(z, y) v(y) dy,$$

если учесть формулу (9), следует, что

$$v(x) = \lambda \int K(z, x) \mu(z) dz,$$

и, далее, после подстановки этого выражения в правую часть соотношения (9) получаем

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lambda^2 \int K(x, y) dy \int K(z, y) \mu(z) dz = \\ &= \lambda^2 \int \mu(z) dz \int K(x, y) K(z, y) dy = \\ &= \lambda^2 \int K_R(x, z) \mu(z) dz, \end{aligned}$$

и обратно.

Предположим теперь, что общий спектр ядер K_L и K_R состоит из чисел

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots, \quad (11)$$

причем

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

и что

$$\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \dots \quad (12)$$

— соответствующие (ортонормированные) собственные функции ядра K_R , а

$$v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots \quad (13)$$

— соответствующие собственные функции ядра K_L , вычисленные с помощью формулы (10). Тогда последние автоматически образуют ортонормированную систему, поскольку

$$\begin{aligned} \int v_h(x) v_h(x) dx &= \lambda_h \lambda_h \iint K(y, x) K(z, x) \mu_h(y) \mu_h(z) dx dy dz = \\ &= \lambda_h \lambda_h \iint K_R(y, z) \mu_h(y) \mu_h(z) dy dz = \\ &= \frac{\lambda_h}{\lambda_h} \int \mu_h(y) \mu_h(y) dy = \begin{cases} 0 & (h \neq k), \\ 1 & (h = k). \end{cases} \end{aligned}$$

Так как ядра K_R и K_L положительны, то, *предполагая, что они непрерывны*, мы можем в силу теоремы Мерсера написать

$$\begin{aligned} K_R(x, y) &= \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-2} \mu_h(x) \mu_h(y), \\ K_L(x, y) &= \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-2} v_h(x) v_h(y), \end{aligned} \quad (14)$$

причем обеспечивается равномерная и абсолютная сходимость обоих рядов. Для заданного же ядра $K(x, y)$ мы можем только написать

$$K(x, y) \sim \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h(x) v_h(y)}{\lambda_h}, \quad (15)$$

где знак Гурвица \sim означает (как обычно), что правая часть является рядом Фурье ядра $K(x, y)$, рассматривае-

мого как функция x или y относительно ОН-системы (12) или (13) соответственно. Однако, как и в § 3.9 (и даже проще), можно показать, что ряд в правой части формулы (15) сходится по крайней мере в среднем к ядру $K(x, y)$, т. е. что

$$K(x, y) = \text{l.i.m.} \sum_{h=1}^n \lambda_h^{-1} \mu_h(x) \nu_h(y). \quad (16)$$

В самом деле, из (3.2.7) и второго из разложений (14) получаем

$$\begin{aligned} \int \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^n \lambda_h^{-1} \mu_h(x) \nu_h(y) \right]^2 dx &= \\ &= \int K^2(x, y) dx - \sum_{h=1}^n \frac{\nu_h^2(y)}{\lambda_h^2} = \\ &= K_L(y, y) - \sum_{h=1}^n \frac{\nu_h^2(y)}{\lambda_h^2} = \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{\nu_h^2(y)}{\lambda_h^2}. \end{aligned}$$

Так как ряд (14) сходится равномерно, то для любого положительного ε существует целое число n_0 , не зависящее от y , такое, что для $n > n_0$ имеем

$$\int \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^n \lambda_h^{-1} \mu_h(x) \nu_h(y) \right]^2 dx < \varepsilon$$

в согласии с (16).

Итак, мы видим, что знак Гурвица \sim в формуле (15) можно заменить знаком равенства, если ряд в правой части сходится равномерно, но ни из соотношения (15), ни из соответствующего равенства никоим образом нельзя заключить, что величины λ_n являются собственными значениями ядра $K(x, y)$. Это ядро может даже, подобно ядрам интегральных уравнений Вольтерра, вовсе не иметь собственных значений.

Однако самым важным приложением ОН-систем (12) и (13) является обобщение теоремы Гильберта – Шмидта на несимметричные ядра. Используя метод § 3.10, можно доказать следующую теорему:

Если ядро $K(x, y)$, рассматриваемое как функция y , интегрируемо с квадратом, то любая функция $f(x)$, допускающая интегральное представление вида

$$f(x) = \int K(x, y) g(y) dy, \quad (17)$$

где $g(x)$ — некоторая L_2 -функция, может быть также представлена абсолютно и почти равномерно сходящимся рядом по функциям (12), т. е.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{h=1}^{\infty} a_h \mu_h(x), \text{ где } a_h = \int f(x) \mu_h(x) dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_h} \int g(x) \nu_h(x) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично, если ядро $K(x, y)$ интегрируемо с квадратом относительно x , то любую функцию $f(x)$, которую можно представить интегралом вида

$$f(x) = \int K(y, x) g(y) dy, \quad (19)$$

можно также представить абсолютно и почти равномерно сходящимся рядом

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{h=1}^{\infty} b_h \nu_h(x), \text{ где } b_h = \int f(x) \nu_h(x) dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_h} \int g(x) \mu_h(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Если ядро принадлежит не только классу L_2 , но и классу L_2^* , то сходимость рассматриваемых рядов не только почти равномерная, но и равномерная в обычном смысле.

Эта прекрасная теорема позволяет немедленно обобщить рассуждения предыдущего параграфа на любые уравнения Фредгольма первого рода с L_2 -ядром. Для этого достаточно заменить собственные функции $\varphi_h(x)$ симметричного ядра функциями $\mu_h(x)$.

3.17. Некоторые обобщения

Изложенная выше теория интегральных уравнений Фредгольма допускает различные обобщения, при которых сохраняются ее характерные черты.

Прежде всего эту теорию можно обобщить, рассматривая *системы* интегральных уравнений Фредгольма. Такую систему можно легко свести к одному уравнению. Например, систему двух интегральных уравнений Фредгольма

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) - \lambda \int_0^1 K_{1,1}(x, y) \varphi_1(y) dy - \\ - \lambda \int_0^1 K_{1,2}(x, y) \varphi_2(y) dy = f_1(x), \\ \varphi_2(x) - \lambda \int_0^1 K_{2,1}(x, y) \varphi_1(y) dy - \\ - \lambda \int_0^1 K_{2,2}(x, y) \varphi_2(y) dy = f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

на основном интервале $(0, 1)$ можно свести к следующему уравнению на основном интервале $(0, 2)$:

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^2 K(x, y) \Phi(y) dy = F(x), \quad (2)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ \varphi_2(x-1) & (1 < x \leq 2), \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & (0 \leq x < 1), \\ f_2(x-1) & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

и $K(x, y)$ равно соответственно

$$K_{1,1}(x, y), K_{1,2}(x, y-1), K_{2,1}(x-1, y), K_{2,2}(x-1, y-1)$$

в четырех квадратах

$$(0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1), \quad (0 \leq x < 1, \quad 1 < y \leq 2), \\ (1 < x \leq 2, \quad 0 \leq y < 1), \quad (1 < x \leq 2, \quad 1 < y \leq 2).$$

Заметим далее, что, хотя до сих пор мы изучали интегральные уравнения на *конечном* основном интервале, предыдущие результаты можно распространить на *некоторые* классы интегральных уравнений на *бесконечном* интервале, например на интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (3)$$

или даже вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (4)$$

а также на соответствующие уравнения первого рода.

Для этой цели мы рассматриваем любое преобразование переменных x и y , переводящее основной интервал в *конечный* интервал, например в случае уравнения (3) преобразование

$$x = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad y = \frac{\eta}{1-\eta}. \quad (5)$$

Конечно, ядро нового интегрального уравнения может иметь некоторые особенности, но если, несмотря на это, оно принадлежит классу L_2 , то все благополучно проходит.

Кроме того, так же как и в случае интегрального уравнения Вольтерра, вместо интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (6)$$

можно рассматривать аналогичное уравнение с итерированным ядром $K_n(x, y)$. Действительно, из уравнения (6)

закключаем (как и в § 2.5), что

$$\begin{aligned} \int K(x, z) \varphi(z) dz - \lambda \int K(x, z) dz \int K(z, y) \varphi(y) dy = \\ = \int K(x, z) f(z) dz, \\ \frac{1}{\lambda} [\varphi(x) - f(x)] - \lambda \int K_2(x, y) \varphi(y) dy = \int K(x, y) f(y) dy, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda^2 \int K_2(x, y) \varphi(y) dy = f(x) + \lambda \int K(x, y) f(y) dy \equiv \\ \equiv f_2(x) \quad (7) \end{aligned}$$

и последовательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) - \lambda^3 \int K_3(x, y) \varphi(y) dy = \\ = f_3(x) \equiv f_2(x) + \lambda \int K(x, y) f_2(y) dy, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Этот метод можно использовать для устранения некоторых особенностей ядра¹⁾, так как итерированные ядра, вообще говоря, более «гладки», чем первоначальное ядро. Например, если дано ядро типа

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x-y|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, H \text{ ограничено}), \quad (9)$$

то легко видеть, что $K_n(x, y)$ принадлежит тому же типу, но так как число α при этом заменяется числом $1 - n(1 - \alpha)$, которое отрицательно при достаточно большом n , то для таких n ядро $K_n(x, y)$ ограничено.

В самом деле, если

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad K'(x, y) = \frac{H'(x, y)}{|x-y|^{\alpha'}},$$

¹⁾ Даже тех особенностей, вследствие которых ядро $K(x, y)$ не интегрируемо с квадратом.

и если $x < y$ (несущественное предположение), то

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, z) K'(z, y) dz &= \int_0^x \frac{H(x, z) H'(z, y)}{(x-z)^\alpha (y-z)^{\alpha'}} dz + \\ &+ \int_x^y \frac{H(x, z) H'(z, y)}{(z-x)^\alpha (y-z)^{\alpha'}} dz + \\ &+ \int_y^1 \frac{H(x, z) H'(z, y)}{(z-x)^\alpha (z-y)^{\alpha'}} dz \end{aligned}$$

и все три интеграла в правой части являются функциями вида

$$\frac{H^*(x, y)}{|x-y|^{\alpha+\alpha'-1}} \quad (H^* \text{ ограничено}),$$

в чем можно убедиться, используя соответственно три подстановки

$$z = x - (y-x)t, \quad z = x + (y-x)t, \quad z = y + (y-x)t.$$

Другим важным обстоятельством является то, что основные свойства интегральных уравнений Фредгольма не зависят от числа измерений пространства переменных x и y .

Поэтому изложенную выше теорию можно легко распространить на интегральные уравнения вида

$$\varphi(P) - \lambda \int_{E_n} K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P) \quad (P \in E_n), \quad (10)$$

где $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — две точки фиксированного n -мерного многообразия E_n , элемент объема которого (в точке Q) обозначается через dV_Q . Более того, если написать $\varphi(x)$, $K(x, y)$ и т. д. вместо $\varphi(P)$, $K(P, Q)$ и т. д., как делают некоторые авторы, то даже форма большинства предыдущих результатов остается без изменений. Мы, однако, не воспользуемся этим приемом, ибо слишком упрощенные обозначения $\varphi(x)$, $K(x, y)$ и т. д. могут послужить источником недоразумений.

В частности, основная теорема Фредгольма и вытекающая из нее теорема об альтернативе из § 2.3 — 2.4 остаются справедливыми и для уравнений (10), если только ядро $K(P, Q)$ принадлежит классу I_2 , т. е. если обе

функции

$$\left[\int_{E_n} K^2(P, Q) dV_Q \right]^{1/2} = A(P), \quad \left[\int_{E_n} K^2(P, Q) dV_P \right]^{1/2} = B(Q) \quad (11)$$

существуют почти всюду в E_n и интегрируемы с квадратом, т. е.

$$\|K\|^2 = \int_{E_n} A^2(P) dV_P = \int_{E_n} B^2(Q) dV_Q \leq N^2, \quad (12)$$

где N — положительная постоянная.

Если ядро симметрично, т. е. если $K(P, Q) = K(Q, P)$, то важная оценка сверху (3.11.5) для первого собственного значения λ_1 остается в силе, т. е. мы имеем

$$|\lambda_1| \leq \| \varphi \|^2 \left[\int_{E_n} \int_{E_n} K(P, Q) \varphi(P) \varphi(Q) dV_P dV_Q \right]^{-1} \quad (13)$$

для любой L_2 -функции φ .

3.18. Колебания мембраны

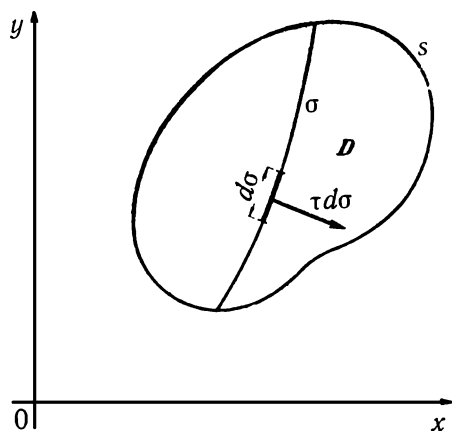
В качестве иллюстрации к замечаниям предыдущего параграфа рассмотрим сейчас важную задачу о колебаниях *мембраны*. Эта задача приводится к двумерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Мембрана — двумерный аналог гибкой нити — это тонкая эластичная пленка с пренебрежимо малой жесткостью¹⁾, которая в положении равновесия является плоской (область D в плоскости x, y , рис. 10).

Будем предполагать, что мембрана *закреплена* на границе s области D и испытывает постоянное равномерное натяжение τ . Это означает, что если разрезать (недеформированную) мембрану вдоль некоторой регулярной кривой σ (σ может частично или целиком совпадать с частью контура s), то механическое действие части мембраны, расположенной по одну сторону дуги σ на часть, распо-

¹⁾ Если жесткостью нельзя пренебречь, то система называется пластиной, а не мембраной.

ложенную по другую ее сторону, можно заменить системой нормальных сил (расположенных в плоскости x, y и направленных во внутрь правой части), таких, что результирующая сила, действующая на любой элемент $d\sigma$ дуги σ , равна $\tau d\sigma$, где τ —величина *постоянная*.



Р и с. 10.

Для определения деформации мембраны под действием заданной нагрузки или, более точно, для определения нормального смещения $z = z(x, y)$ точки $P \equiv (x, y)$ мембраны, если нагрузка $p(\xi, \eta) d\xi d\eta$ действует (параллельно оси Oz) на двумерный элемент $d\xi d\eta$ в точке $Q = (\xi, \eta)$ области D , можно воспользоваться методами, аналогичными методам § 1.1 и 1.9 (т. е. применить функцию влияния и т. д.). Однако в данном случае лучше начать с дифференциального уравнения мембраны¹⁾

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\tau} p(x, y), \quad (1)$$

так как тогда можно воспользоваться результатами § 2.7 о задаче Дирихле. Эти результаты гарантируют существование функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ оператора Δ относитель-

¹⁾ См., например, Франк и Мизес [53] стр. 318.

но области D . Ее можно записать в виде

$$G(P, Q) \equiv G(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} - g(P, Q), \quad (2)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

обозначает расстояние между точками P и Q области D , а $g(P, Q)$ — гармоническая внутри D функция, граничные значения которой совпадают с граничными значениями функции $\ln(1/r)$ (так что $G(P, Q)$ равна нулю на s). Если D — круг радиуса a с центром в начале координат O , то

$$G(P, Q) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_1}, \quad (3)$$

где r_1 — расстояние точки Q от (внешней) точки

$$P_1 \equiv \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right).$$

На рис. 11 графически изображено в общих чертах поведение этой функции.

С помощью функции Грина можно вычислять значение любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x, y)$, зная только ее значения на границе s и значения лапласиана $\Delta\varphi$ внутри D . Достаточно воспользоваться хорошо известной *теоремой Грина* (третье тождество Грина)¹⁾

$$2\pi \varphi(x, y) = \oint_s \frac{dG}{dn} \varphi ds - \iint_D G(P, Q) \Delta\varphi(Q) dS_Q. \quad (4)$$

Так как смещение $z(x, y)$ точек мембраны должно обращаться в нуль на границе s области D (где мембрана закреплена), то из формул (4) и (1) (используя очевидные обозначения) получаем

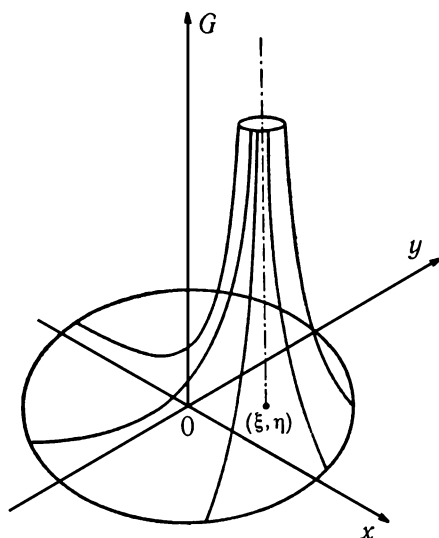
$$z(P) = \frac{1}{2\pi\tau} \iint_D G(P, Q) p(Q) dS_Q. \quad (5)$$

¹⁾ См., например, Трикоми [46], стр. 324.

Из этого статистического уравнения можно получить соответствующее динамическое уравнение, описывающее свободные колебания мембраны (т. е. колебания при отсутствии внешних сил), подставляя вместо $p(Q)$ величину

$$-\mu(Q) \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(Q),$$

где t обозначает время, а $\mu(Q) \equiv \mu(\xi, \eta)$ — *поверхностная плотность* (вообще говоря, неоднородной) мембраны, так что



Р и с. 11.

$\mu(\xi, \eta) d\xi d\eta$ есть масса элемента $d\xi d\eta$ мембраны в точке $Q = (\xi, \eta)$. Итак, динамическое уравнение имеет вид

$$z(P) = -\frac{1}{2\pi\tau} \iint_D G(P, Q) \mu(Q) \frac{\partial^2 z(Q)}{\partial t^2} dS_Q. \quad (6)$$

В частности, для гармонических колебаний с угловой частотой ω , т. е. для колебаний вида

$$z = u(P) e^{\omega t i}, \quad (7)$$

где u не зависит от t , в силу формулы

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 u(P) e^{\omega t i}$$

получаем *однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода*:

$$u(P) = \frac{\omega^2}{2\pi\tau} \iint_D G(P, Q) \mu(Q) u(Q) dS_Q. \quad (8)$$

В случае *однородной* мембраны (т. е. если $\mu(Q) = \mu = \text{const}$ ¹⁾) это уравнение приобретает более простую форму:

$$u(P) = \lambda \iint_D G(P, Q) u(Q) dS_Q, \quad \text{где } \lambda = \frac{\omega^2 \mu}{2\pi\tau}. \quad (9)$$

Основное свойство функции $G(P, Q)$ как ядра интегрального уравнения — это ее *симметрия*, т. е. $G(P, Q) = G(Q, P)$. Это хорошо известное свойство функции Грина нетрудно вывести из статистического уравнения (5), если воспользоваться *принципом взаимности Бетти* (ср. § 1.1 и Трикоми [49]).

Другим важным свойством ядра $G(P, Q)$ является его *положительная определенность* (см. § 3.12), т. е. для любой L_2 -функции $\Phi(P)$ (отличной от нуля почти всюду) имеем

$$J(\Phi, \Phi) = \iint_D \iint_D G(P, Q) \Phi(P) \Phi(Q) dS_P dS_Q > 0. \quad (10)$$

Это нетрудно получить из статического уравнения (5), которое позволяет рассматривать $J(\Phi, \Phi)$ как *работу* (ср. § 3.14), но более поучительно воспользоваться хорошо известным тождеством

$$\begin{aligned} \iint_D \Phi(P) \Delta \Phi(P) dS_P + \iint_D \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS_P + \\ + \oint_s \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

¹⁾ Если же $\mu(x, y) \neq \text{const}$, то получаем уравнение с ядром

$$K(P, Q) = G(P, Q) \sqrt{\mu(P) \mu(Q)},$$

если предварительно положить, как и в § 3.14, $u(P) \sqrt{\mu(P)} = \varphi(P)$.

которое для любой дважды дифференцируемой функции $\varphi(P)$, равной нулю на границе s области D , дает

$$\iint_D \varphi(P) \Phi(P) dS_P = - \iint_D \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dS_P,$$

если только

$$\Phi \equiv \Delta \varphi \quad (12)$$

принадлежит классу L_2 . С другой стороны, для такой функции имеем согласно (4)

$$\varphi(P) = - \frac{1}{2\pi} \iint_D G(P, Q) \Phi(Q) dS_Q, \quad (13)$$

поэтому предыдущее тождество можно также записать в виде

$$J(\Phi, \Phi) = 2\pi \iint_D \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS_P > 0. \quad (14)$$

Другими словами, имеем тождественно

$$J(\Phi, \Phi) = 2\pi \iint_D |\text{grad } \Phi(P)|^2 dS_P, \quad (15)$$

если только функция $\varphi(P)$ (равная нулю на границе s) связана с Φ эквивалентными между собой уравнениями (12) или (13).

Отсюда мы можем непосредственно заключить, что однородная (а также и неоднородная) мембрана любой формы обладает бесконечным множеством собственных частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, которые отвечают положительным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ положительного симметричного ядра $G(P, Q)$.

Эти собственные значения можно приближенно вычислять, используя методы § 3.11, которые допускают непосредственное распространение на случай двух (или более) измерений. В частности, из оценки (3.17.13) получаем полезную оценку сверху для наименьшего собственного значения λ_1 ядра $G(P, Q)$. Именно

$$\lambda_1 \leq \|\Delta \varphi\|^2 \left[2\pi \iint_D |\text{grad } \varphi(P)|^2 dS_P \right]^{-1}, \quad (16)$$

где $\varphi(P)$ — любая дважды дифференцируемая функция, равная нулю на границе s и обладающая тем свойством, что $\Delta\varphi$ принадлежит классу L_2 .

В соответствии с этим первая собственная частота ω_1 однородной мембраны допускает оценку сверху

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \|\Delta\varphi\| \left[\iint_D |\text{grad } \varphi(P)|^2 dS_P \right]^{-1/2}. \quad (17)$$

В качестве примера рассмотрим случай однородной *круговой* мембраны радиуса a . Тогда дифференциальное уравнение движения можно решить в явном виде с помощью функций Бесселя¹⁾, и, следовательно, собственные частоты даются формулами

$$\omega_{n,m} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} j_{n,m} \quad (m=1, 2, \dots; n=0, 1, \dots), \quad (18)$$

где $j_{n,m}$ обозначает m -й положительный нуль (считая от начала координат) бесселевой функции первого рода $J_n(x)$. В частности, для наименьшей частоты имеем точное значение

$$\omega_1 = \omega_{01} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} j_{0,1} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} 2,4048. \quad (19)$$

Оценку сверху для этой же самой частоты можно получить из оценки (17), полагая

$$\varphi(P) = a^2 - r^2, \quad (20)$$

где r обозначает расстояние от точки P до центра мембраны. Так как

$$\text{grad}(r^2) = 2r \text{ grad } r, \quad |\text{grad } \varphi|^2 = 4r^2,$$

то мы получаем

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \left[16 \iint_D dS_P \right]^{1/2} \left[4 \iint_D r^2 dS_P \right]^{-1/2},$$

т. е.

$$\omega_1 \leq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} 2\sqrt{2}, \quad (21)$$

¹⁾ См., например, Франк и Мизес [53], стр. 325 и сл. или Морс [31], стр. 150 и сл.

что является хорошим приближением к точному значению (19), ибо $2\sqrt{2} = 2,8284$.

Кроме того, метод интегральных уравнений может дать хорошую информацию, например, о вариации собственных частот мембраны при незначительных изменениях ее формы ¹⁾.

¹⁾ См. Кралль и Эйноуди [26], т. 2, стр. 265—267, где цитируются некоторые результаты Боджио по этому вопросу. См. также Поля и Сеге [38].

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СИНГУЛЯРНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Общие замечания и примеры

Материал, излагаемый в этой последней главе, носит фрагментарный характер; это вызвано как существом вопроса, так и тем обстоятельством, что мы рассматриваем теории, пока еще находящиеся в процессе образования¹⁾. Однако уже сейчас можно отметить две различные цели исследований в этой области:

(I) установить, верны ли теоремы Фредгольма (особенно теорема об альтернативе) для некоторых классов интегральных уравнений в том случае, когда ядро не принадлежит классу L_2 ;

(II) изучить типичные классы интегральных уравнений, которые по своим свойствам резко отличаются от уравнений Фредгольма.

Некоторое представление об исследованиях вопросов первого рода мы дали в § 1.12 и 3.17. Сейчас рассмотрим некоторые примеры изучения вопросов второго рода.

В теории уравнений, не подчиняющихся теоремам Фредгольма, часто встречаются три новых явления:

1) наличие конечных предельных точек спектра собственных значений или даже *непрерывного спектра*, т. е. собственных значений, заполняющих целый интервал λ -оси или даже целую λ -ось;

2) наличие собственных значений *бесконечной кратности*, т. е. собственных значений, которым соответствует бесконечное число линейно независимых собственных функций;

¹⁾ Однако некоторые вопросы разработаны достаточно хорошо. См., например, Trjitzinsky W. F., General theory of singular integral equations with real kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 46 (1939), 202—279 и Мусхелишвили Н. И. [32].

3) наличие *точек бифуркации* (в вещественном нелинейном случае), т. е. точек λ -оси, при переходе через которые число решений уравнения меняется, оставаясь, однако, конечным.

Эти явления наблюдаются уже для простейших интегральных уравнений, которые не удовлетворяют условиям предыдущих глав. В качестве примера уравнения с непрерывным спектром мы рассмотрим уравнение *Лалеско — Пикара*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

ядро которого обладает бесконечной нормой, ибо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|} dx dy &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-2x} [e^{+2y}]_{-\infty}^x + e^{+2x} [e^{-2y}]_{-\infty}^x \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx. \end{aligned}$$

Если обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дважды дифференцируемы, то наше уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \left[e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \varphi(y) dy + e^x \int_x^{\infty} e^{-y} \varphi(y) dy \right] = f(x)$$

по существу эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varphi''(x) + 2\lambda\varphi(x) - [\varphi(x) - f(x)] = f''(x),$$

т. е. уравнению

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = f''(x) - f(x).$$

Поэтому в том случае, когда $f(x) \equiv 0$, мы имеем

$$\varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad (2)$$

где A и B — произвольные постоянные и

$$\mu = \sqrt{1 - 2\lambda}, \quad (3)$$

если только интеграл в левой части уравнения (1) существует, т. е. если $|\operatorname{Re} \mu| < 1$ (для вещественных λ это означает, что должно быть $\lambda > 0$).

Это показывает, что в области вещественных чисел спектр уравнения (1) заполняет бесконечный интервал $0 < \lambda < \infty$. Каждая точка этого интервала представляет собой собственное значение кратности 2 для нашего уравнения. Однако соответствующие собственные функции (2) не принадлежат классу L_2 на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Более общие уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) \varphi(y) dy = 0$$

[или аналогичные уравнения, когда областью интегрирования служит полупрямая $(0, \infty)$], где $k(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, изучались Винером и Хопфом¹⁾. Недавно С. Чандрасекхар²⁾ нашел важные применения таких уравнений к теории равновесного излучения звездных атмосфер.

Важным примером интегрального уравнения с собственными значениями бесконечной кратности является уравнение с «ядром Ганкеля»³⁾

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{\infty} J_{\nu}[2\sqrt{tu}] \varphi(u) du = f(t), \quad (4)$$

где $J_{\nu}(z)$ — бесселева функция первого рода порядка ν .

Много лет назад мною было показано⁴⁾, что если $\nu > -1$ и если преобразование Лапласа

$$\psi(x) \equiv \mathcal{L}_x[t^{\nu/2} \varphi(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\nu/2} \varphi(t) dt \quad (5)$$

существует, то после умножения обеих частей уравнения (4) на $t^{\nu/2}$ и применения к обеим частям \mathcal{L} -преобра-

¹⁾ Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singularer Integralgleichungen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1931), 695. См. также [34].

²⁾ Многочисленные работы в *Astrophysical Journal* начиная с т. 94 (1941) и далее.

³⁾ Tricomi F., Autovalori e autofunzioni del nucleo di Hankel, *Atti Accad. Sci. Torino*, 71 (1935—1936), 285—291.

⁴⁾ Tricomi F., Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di Hankel, *Rend. Lincei* (6), 22 (1935), 564—571.

зования можно изменить порядок интегрирования по бесконечному интервалу в двойном интеграле. Тогда мы получим

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{\infty} \varphi(y) dy \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{v/2} J_v(2\sqrt{ty}) dt = g(x),$$

где

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{v/2} f(t) dt \equiv \mathcal{L}_x[t^{v/2} f(t)]. \quad (6)$$

В силу хорошо известной формулы для \mathcal{L} -преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(y) dy \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{v/2} J_v(2\sqrt{ty}) dt &= x^{-(v+1)} \int_0^{\infty} e^{-u/x} y^{v/2} \varphi(y) dy = \\ &= x^{-(v+1)} \psi\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Поэтому данное уравнение приобретает «алгебраическую» форму

$$\psi(x) - \lambda x^{-(v+1)} \psi\left(\frac{1}{x}\right) = g(x). \quad (7)$$

В однородном случае $f(x) \equiv g(x) \equiv 0$ можно положить

$$x = e^{\xi}, \quad \psi(e^{\xi}) = \Psi(\xi) \quad (8)$$

и получить соотношение

$$\lambda \Psi(-\xi) = e^{(v+1)\xi} \Psi(\xi). \quad (9)$$

Применив эту формулу дважды, получим

$$\Psi(\xi) = \lambda^2 \Psi(\xi),$$

т. е. $\lambda^2 = 1$. Это показывает, что единственными возможными собственными значениями являются $\lambda = \pm 1$ ¹⁾. Каж-

¹⁾ Это, между прочим,—непосредственное следствие *инволютивного* характера преобразования Ганкеля (см., например, Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., *Методы теории комплексного переменного*, М., 1958, стр. 538. — *Прим. перев.*).

дое из этих значений имеет *бесконечную кратность*, так как при $\lambda = \pm 1$ уравнению (9) удовлетворяет функция

$$\Psi(\xi) = \frac{E(\xi)}{1 + \lambda e^{(\nu+1)\xi}}, \quad (10)$$

где $E(x)$ обозначает *произвольную четную* (аналитическую) функцию x .

Например, если $\nu = 0$, $\lambda = 1$, $E(x) \equiv 1$, мы получаем

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi}, \quad \psi(x) = \frac{1}{1 + x}, \quad \varphi(x) = e^{-x},$$

а если $E(x) = 2\sqrt{\pi} \operatorname{ch}(x/2)$, имеем

$$\Psi(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi/2}, \quad \psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Более того, при $\nu = \pm 1/2$ мы можем легко определить этим путем все функции, *переходящие в себя* при \sin -и \cos -преобразованиях Фурье.

Наконец, чтобы дать пример точки *бифуркации*, рассмотрим простейшее нелинейное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi^2(y) dy = 1. \quad (11)$$

Положим

$$\int_0^1 \varphi^2(y) dy = \xi.$$

Тогда

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \xi, \quad (12)$$

и уравнение (11) эквивалентно алгебраическому уравнению второй степени

$$\xi = (1 + \lambda \xi)^2.$$

Отсюда получаем

$$\xi = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}$$

и

$$\varphi(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda}. \quad (13)$$

Таким образом, наше уравнение допускает вещественные решения тогда и только тогда, когда $\lambda \leq 1/4$. Оно имеет в точности два решения, исключая случай $\lambda = 1/4$, когда оно имеет решение (кратности 2) $\varphi(x) \equiv 2$. При

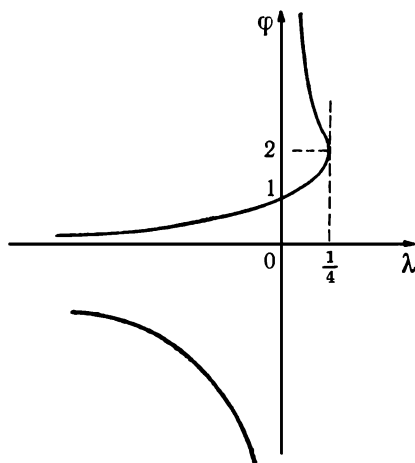


Рис. 12.

$\lambda = 0$ одно решение имеет вид $\varphi(x) \equiv 1$, а второе *бесконечно*. Эти свойства решений иллюстрируются рис. 12. Точка $\lambda = 1/4$ — это *точка бифуркации*, а точка $\lambda = 0$ — *особая точка* уравнения.

Соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi^2(y) dy = 0 \quad (14)$$

всегда допускает нетривиальное решение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}. \quad (15)$$

Это, однако, не означает, что уравнение (11) имеет бесконечное число решений, ибо сейчас из существования решений (15) не следует существование бесконечного

числа решений «неоднородного» уравнения (ср. также § 4.5).

4.2. Уравнения, содержащие интегралы в смысле главного значения по Коши, и преобразование Гильберта

Мы видели в § 3.17, что интегральное уравнение Фредгольма с ядром вида

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, H \text{ ограничено})$$

может быть преобразовано в уравнение Фредгольма с ограниченным ядром. При этом весьма существенно предположение, что $\alpha < 1$. В важном же случае $\alpha = 1$ ¹⁾ (тогда интеграл в уравнении следует понимать в смысле *главного значения по Коши*²⁾) интегральное уравнение коренным образом отличается от уравнений, рассматривавшихся в предыдущих главах.

Один из самых первых результатов в этой области представляют собой две формулы взаимности, выведенные Д. Гильбертом³⁾ из интеграла Пуассона. Им показано,

¹⁾ Этот случай имеет большое значение в аэродинамике и т. п. См., например, Reissner E., Boundary values problems in aerodynamics of lifting surfaces in non-uniform motion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 825—850.

²⁾ *Главное значение по Коши* интеграла от функции $f(x)$, которая обращается в бесконечность во внутренней точке $x = x_0$ интервала интегрирования (a, b) , — это предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \right) f(x) dx,$$

где

$$0 < \varepsilon \leq \min(x_0 - a, b - x_0).$$

Мы будем использовать для обозначения главного значения звездочку, помещаемую над обычным знаком интеграла.

Если $f(x) = g(x)/(x - x_0)$, где $g(x)$ — любая интегрируемая (по Лебегу) функция, то указанный предел существует и конечен для почти всех x_0 из интервала (a, b) ; если $g(x)$ принадлежит классу L_p при $p > 1$, то главное значение интеграла также принадлежит L_p . См., например, Титчмарш [44], стр. 176, 161.

³⁾ Hilbert D., *Göttinger Nachr.* (1904), 213—259, а также Гильберт [11], стр. 75.

что если $\Phi(z) = u + iv$ — аналитическая функция, регулярная в круге $|z| < 1$, а $u(\theta)$ и $v(\theta)$ — соответственно вещественная и мнимая части функции $\varphi(z)$ на окружности $|z| = 1$, то

$$\left. \begin{aligned} u(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} v(\varphi) d\varphi, \\ v(\theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

если только

$$\int_{-\pi}^{*\pi} u(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{*\pi} v(\theta) d\theta = 0. \quad (2)$$

Например, при $\Phi(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos n\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} \sin n\varphi d\varphi, \\ \sin n\theta &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} \cos n\varphi d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которые часто полезны при преобразовании ряда по синусам в ряд по косинусам и обратно.

Вместо того чтобы рассматривать точные условия справедливости формул (1), мы будем изучать по существу эквивалентный вопрос о значениях, принимаемых на вещественной оси аналитической функцией $\Phi(z)$, регулярной в *полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$. В этом случае интеграл Пуассона для гармонической функции

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi$$

приводит, если выполнены соответствующие условия, к бо-

лее простым формулам взаимности

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)}{t-x} dt, \\ v(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t-x} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

между вещественной частью $u(x)$ и мнимой частью $v(x)$ граничных значений $\Phi(x + i0)$ функции $\Phi(z)$ на вещественной оси.

Другими словами, (v, u) и $(u, -v)$ — это две пары функций, «сопряженных» относительно преобразования Гильберта

$$f(x) = H_x [\varphi(y)] \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy \quad (5)$$

в том смысле, что вторая пара есть преобразование Гильберта первой пары.

Это преобразование изучается Титчмаршем в его книге [44] об интегралах Фурье, где доказаны следующие три основные теоремы¹⁾:

Теорема I. (Теорема обращения.) *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит классу L_p ($p > 1$) на основном интервале $(-\infty, +\infty)$, то формула (5) определяет почти всюду некоторую функцию $f(x)$, также принадлежащую L_p , преобразование Гильберта $H[f]$ которой почти всюду совпадает с $-\varphi(x)$.*

Это означает, что для любой L_p -функции

$$H\{H[\varphi]\} = -\varphi. \quad (6)$$

Теорема II. (Обобщенная теорема Парсеваля.) *Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно. Если*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \quad (7)$$

¹⁾ Эти теоремы мы приводим здесь без доказательств. Относительно доказательств см. [44], стр. 176, 183 и 185.

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_x[\varphi_1(y)] H_x[\varphi_2(y)] dx. \quad (8)$$

Теорема III. Пусть $\Phi(x+iy)$ — аналитическая функция, регулярная для $y > 0$ и для всех значений y удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^p dx < K \quad (p > 1), \quad (9)$$

где K — положительная постоянная. Тогда при $y \rightarrow +0$ $\Phi(x+iy)$ стремится почти всюду к предельной функции

$$\Phi(x+i0) = u(x) + iv(x),$$

вещественная и мнимая части которой принадлежат L_p и связаны формулами обращения (4).

Поэтому, в частности, почти всюду имеет место равенство

$$\operatorname{Re} \Phi(\xi+i0) = H_\xi[\operatorname{Im} \Phi(\xi+i0)]. \quad (10)$$

Обратно, если задана вещественная функция $v(x)$ класса L_p и если мы полагаем

$$u(x) = H_x[v(y)], \quad (11)$$

то аналитическую функцию $\Phi(z)$, отвечающую паре (u, v) , можно вычислить по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) + iv(t)}{t-z} dt \quad (\operatorname{Im} z > 0); \quad (12)$$

эта функция удовлетворяет условию (9)¹⁾.

¹⁾ Поэтому мы можем утверждать, что аналитическая функция $\Phi(z)$, регулярная для $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяет условию (9), если только ее граничные значения $\Phi(x+i0) = u(x) + iv(x)$ на вещественной оси существуют почти всюду и функции $u(x)$ и $v(x)$ обе принадлежат классу L_p при $p > 1$. Другими словами, в принятых предположениях не нужно заранее требовать, чтобы u и v были связаны уравнениями (4).

К этим трем теоремам мы прибавим еще одну, роль которой аналогична роли *теоремы о свертке* в теории преобразования Лапласа.

Теорема IV¹⁾. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно. Если

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1, \quad (13)$$

т. е. если $p_1 + p_2 < p_1 p_2$, то

$$H\{\varphi_1 H[\varphi_2] + \varphi_2 H[\varphi_1]\} = H[\varphi_1] H[\varphi_2] - \varphi_1 \varphi_2 \quad (14)$$

почти всюду.

Для доказательства положим

$$\varphi_1 = v_1, \quad H[\varphi_1] = u_1; \quad \varphi_2 = v_2, \quad H[\varphi_2] = u_2.$$

Тогда две аналитические функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{u_1 + iv_1}{t-z} dt,$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{u_2 + iv_2}{t-z} dt$$

регулярны для $\text{Im } z > 0$ и удовлетворяют для всех значений y условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(x + iy)|^{p_1} dx < K_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2(x + iy)|^{p_2} dx < K_2,$$

где K_1 и K_2 — соответствующие положительные постоянные. Поэтому, если положить $\Phi_1(z) \Phi_2(z) = \Phi(z)$ и [в соответствии с условием (13)]

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} \quad (r > 1),$$

¹⁾ Tricomi F. G., On the finite Hilbert transformation, *Quart. J. Math.* (Oxford) (2), 2 (1951), 199—211.

то в силу неравенства Гельдера¹⁾ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^r dx < K_1^{r/p_1} K_2^{r/p_2}.$$

Следовательно, функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (9) при $p = r > 1$. Из формулы (10) (т. е. из теоремы III) вытекает, что

$$\begin{aligned} u_1 u_2 - v_1 v_2 &= \operatorname{Re} \Phi(x + i0) = H [\operatorname{Im} \Phi(x + i0)] = \\ &= H [u_1 v_2 + v_1 u_2], \end{aligned}$$

а это и есть иначе записанная теорема о свертке (14).

«Косо-взаимный характер» преобразования Гильберта [см. формулу (6)] позволяет нам записать формулу Парсваля (8) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) H_x [\varphi_2(y)] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x) H_x [\varphi_1(y)] dx. \quad (15)$$

После умножения на π эта формула может быть записана следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x) dx \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi_1(y)}{y-x} dy,$$

или (если поменять местами x и y в правой части)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y) dy \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi_1(x)}{y-x} dx. \quad (16)$$

Итак, мы видим, что при соответствующих условиях можно менять местами интеграл «со звездочкой» и обычный интеграл. Если функции φ_1 и φ_2 равны нулю вне некоторого интервала (a, b) , то предыдущая формула имеет вид

$$\int_a^b \varphi_1(x) dx \int_a^{*b} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = \int_a^b \varphi_2(y) dy \int_a^{*b} \frac{\varphi_1(x)}{y-x} dx; \quad (17)$$

равенство (17) справедливо, если φ_1 и φ_2 принадлежат

¹⁾ См. Харди, Литтльвуд и Поля [54], стр. 169.

классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1. \quad (18)$$

Если основной интервал (a, b) конечен, то условие (18) можно заменить условием

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \quad (18')$$

ибо на таком интервале каждая L_p -функция принадлежит также классу $L_{p'}$ для $p' < p$; поэтому вместо пары p_1, p_2 , удовлетворяющей условию (18), мы можем подставить пару $p'_1 \leq p_1, p'_2 \leq p_2$, удовлетворяющую условию (18). Более общо, рассматривая вместо произведения $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ функцию $\Phi(x, y)$, мы можем написать

$$\int_a^b dx \int_a^{*b} \frac{\Phi(x, y)}{y-x} dy = \int_a^b dy \int_a^{*b} \frac{\Phi(x, y)}{y-x} dx, \quad (19)$$

если только функция $\Phi(x, x)$ принадлежит классу L_p при $p > 1$ и двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b \frac{\Phi(x, y) - \Phi(x, x)}{x-y} dx dy \quad (20)$$

существует в обыкновенном смысле, так что к нему можно применить классическую теорему Фубини¹⁾.

Аналогичным образом теорема IV приводит к наиболее употребительному частному случаю формулы перемены интегрирования для двух интегралов «со звездочкой»²⁾.

¹⁾ Относительно подробностей см. цитированную ниже работу автора.

²⁾ Общую формулу перемены порядка интегрирования для двух интегралов в смысле главного значения по Коши можно записать в виде

$$\int_a^{*b} \frac{dz}{z-x} \int_a^{*b} \frac{F(x, y, z)}{y-z} dy = \int_a^{*b} dy \int_a^{*b} \frac{F(x, y, z)}{(z-x)(y-z)} dz - \pi^2 F(x, x, x).$$

В самом деле, так как

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x-x_0} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{(x-x_0)(y-x)} dx = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x-x_0} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy - \\
 & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x_0} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-x_0} - \frac{1}{x-y} \right) \varphi_1(x) dx = \\
 & = \pi^2 H_{x_0} \{ \varphi_1(x) H_x [\varphi_2(y)] \} - \pi^2 H_{x_0} [\varphi_2(y)] H_{x_0} [\varphi_1(x)] + \\
 & + \pi^2 H_{x_0} \{ \varphi_2(y) H_y [\varphi_1(x)] \} = \\
 & = \pi^2 H_{x_0} \{ \varphi_1(x) H_x [\varphi_2(y)] + \varphi_2(x) H_x [\varphi_1(y)] \} - \\
 & - \pi^2 H_{x_0} [\varphi_1(y)] H_{x_0} [\varphi_2(y)],
 \end{aligned}$$

то из формулы (14) следует, что почти всюду

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x-x_0} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x) dx}{(x-x_0)(y-x)} - \pi^2 \varphi_1(x_0) \varphi_2(x_0), \quad (21)
 \end{aligned}$$

если только φ_1 и φ_2 принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно и, кроме того, имеет место неравенство (13).

Обычно эта формула приписывается А. Пуанкаре (Poincaré H., *Leçons de Mécanique Céleste*, 1910, v. 3, 254), но ее можно найти уже у Г. Харди (Hardy G. H., *The theory of Cauchy's principal values*, IV, *Proc. London Math. Soc.* (2), 7 (1908), 181—208). Доказательство Харди не очень просто, и оно аналогично тому, которое позже дано мною (причем мне это доказательство не было известно) в моей работе по уравнениям в частных производных смешанного типа; см. *Mem. Accad. Lincei Roma* (5), 14 (1923), 133—267; русский перевод: Трикоми Ф., *О линейных уравнениях смешанного типа*, М., 1947.

Простое доказательство этой формулы при более слабых ограничениях на функцию F можно найти в моей недавней работе: «Sull' inversione dell'ordine di integrali «principali» nel senso di Cauchy», *Rend. Lincei* (8), 18 (1955), 3—7.

В частности, если φ_1 и φ_2 тождественно равны нулю вне интервала (a, b) , то

$$\begin{aligned} & \int_a^{*b} \frac{\varphi_1(x)}{x-x_0} dx \int_a^{*b} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = \\ &= \int_a^{*b} \varphi_2(y) dy \int_a^{*b} \frac{\varphi_1(x) dx}{(x-x_0)(y-x)} - \pi^2 \varphi_1(x_0) \varphi_2(x_0) \quad (a < x_0 < b). \end{aligned} \quad (22)$$

Эти соображения позволяют нам рассматривать в пространстве L_p интегральные уравнения указанного в начале настоящего параграфа вида, даже если основной интервал совпадает со всей вещественной осью $(-\infty, \infty)$.

Действительно, рассмотрим сначала уравнение *второго рода*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x), \quad (23)$$

или символически

$$\varphi(x) - \lambda \pi H_x [\varphi(y)] = f(x).$$

Применяя преобразование Гильберта к обеим частям этого уравнения и используя соотношение (6), получаем

$$H_x [\varphi(y)] + \lambda \pi \varphi(x) = H_x [f(y)].$$

Поэтому

$$(1 + \lambda^2 \pi^2) \varphi(x) = f(x) + \lambda \pi H_x [f(y)],$$

или в развернутом виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 \pi^2} \left[f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy \right]. \quad (24)$$

Более того, если ядро имеет вид

$$K(x, y) = \frac{1}{y-x} + K^*(x, y), \quad (25)$$

где функция K^* ограничена (или по крайней мере инте-

грируема) то, в силу предыдущих рассуждений,

$$(1 + \lambda^2 \pi^2) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x, y) \varphi(y) dy + \\ + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z-x} \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x, y) \varphi(y) dy.$$

Если в последнем члене можно менять порядок интегрирования, то это *обыкновенное*¹⁾ уравнение Фредгольма второго рода с ядром

$$K^*(x, y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^*(z, y)}{z-x} dz.$$

4.3. Преобразование Гильберта на конечном интервале и уравнение профиля крыла самолета

Сейчас мы будем изучать уравнения, содержащие интегралы в смысле главного значения по Коши, на *конечном интервале*. Такие уравнения имеют важные приложения, например, в аэродинамике.

Фундаментальное значение для этих исследований имеет преобразование *Гильберта на конечном интервале*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy \equiv \mathcal{T}_x[\varphi(y)], \quad (1)$$

причем в качестве основного интервала мы берем интервал $(-1, 1)$.

До недавнего времени этому преобразованию, в противоположность преобразованию на бесконечном интервале, уделялось мало внимания²⁾. Некоторые его свойства можно

¹⁾ Говоря «обыкновенное» уравнение, мы имеем в виду, что присутствующие в нем интегралы понимаются в обычном смысле, а не в смысле главного значения по Коши; однако основной интервал остается неограниченным.

²⁾ В моей работе «On the finite Hilbert transformation» [*Quart. J. Math.* (Oxford) (2), 2 (1951), 199—211] содержится в основном материал этого параграфа.

вывести из соответствующих свойств преобразования на бесконечном интервале, полагая функцию φ тождественно равной нулю вне интервала $(-1, 1)$.

Так, например, из формулы Парсеваля (4.2.15)¹⁾ получаем

$$\int_{-1}^{*1} \{\varphi_1(x) \mathcal{T}_x [\varphi_2(y)] + \varphi_2(x) \mathcal{T}_x [\varphi_1(y)]\} dx = 0, \quad (2)$$

если только функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно [на основном интервале $(-1, 1)$] и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1. \quad (3)$$

Аналогично, если в этом условии исключить знак равенства, то из формулы (4.2.14) мы получим *теорему о свертке*

$$\mathcal{T} \{\varphi_1 \mathcal{T} [\varphi_2] + \varphi_2 \mathcal{T} [\varphi_1]\} = \mathcal{T} [\varphi_1] \mathcal{T} [\varphi_2] - \varphi_1 \varphi_2. \quad (4)$$

Однако в других случаях преобразование \mathcal{T} требует специального исследования. Например, формула обращения (в пространстве L_p)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{*\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy, \quad (5)$$

которую можно вывести непосредственно из теоремы I предыдущего параграфа, неудовлетворительна, так как ее применение требует знания функции $f(x)$ вне основного интервала $(-1, 1)$, где она, вообще говоря, не равна нулю.

Одна из трудностей при изучении \mathcal{T} -преобразования состоит в том, что здесь нет простой теоремы обращения типа теоремы I предыдущего параграфа: в самом деле, *это преобразование не имеет однозначно определенного обратного преобразования в пространстве L_p , $p > 1$.*

Например, \mathcal{T} -преобразование функции

$$(1-x^2)^{-1/2}, \quad (6)$$

¹⁾ В применении к преобразованиям на конечном интервале формула Парсеваля в своей исходной форме (4.2.8) особого интереса не представляет.

принадлежащей классу $2-0^1$), тождественно равно нулю на основном интервале $(-1, 1)$; в самом деле, положив $y = (1 - t^2)/(1 + t^2)$, мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x[(1 - y^2)^{-1/2}] &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1-x) - (1+x)t^2} = \\ &= (1 - x^2)^{-1/2} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+xt}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+xt}} \right| \right]_0^{\infty} = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Однако вне интервала $(-1, 1)$ имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - y^2)^{-1/2}}{y - x} dy = -2(x^2 - 1)^{-1/2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = -\pi(x^2 - 1)^{-1/2}.\quad (8)$$

Заметим еще, что в качестве следствия из соотношения (7) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x[\sqrt{1 - y^2}] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{1 - y^2}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{dy}{y - x} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y + x}{\sqrt{1 - y^2}} dy = -x.\end{aligned}\quad (9)$$

Основной задачей при изучении преобразования \mathcal{T} является нахождение для него формулы обращения в пространстве L_p ($p > 1$), т. е. решение «уравнения профиля крыла самолета» $(1)^2$ в классе L_p ($p > 1$). Конечно, мы должны

¹) Для краткости будем говорить «функция f принадлежит классу p » вместо «функция f принадлежит классу L_p » (на рассматриваемом основном интервале); аналогично будем говорить «функция f принадлежит классу $r-0$ » вместо «функция f принадлежит классу L_p для всех $1 < p < r$ » и «функция f принадлежит классу $r+0$ », если $f \in L_{r+\varepsilon}$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

²) Уравнение (1) встречается в теории движения несущей поверхности в потоке несжимаемой жидкости, и поэтому его часто называют *уравнением профиля крыла самолета*. Оно изучалось, в частности, Г. Зёнгеном [S ö h n g e n H., *Math. Zeitschr.*, 45 (1939), 245—264], использовавшим для этого изящный метод теории потенциала (интеграл Пуассона), который, однако, потребовал введения сильных ограничений на заданные функции. Эти ограничения были затем устранены в работе того же автора: *Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation*, *Math. Zeitschr.*, 60 (1954), 31-51.

предположить, что заданная функция $f(x)$ сама принадлежит классу L_p .

Чтобы установить формулу обращения, мы используем теорему о свертке (4), которая может быть применена к паре функций

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad \varphi_2(x) \equiv \sqrt{1-x^2},$$

так как вторая функция, будучи ограниченной, принадлежит *любому* классу L_{p_2} при сколь угодно большом p_2 . Таким образом, получаем равенство

$$\mathcal{T}_x[-y\varphi(y) + \sqrt{1-y^2}f(y)] = -xf(x) - \sqrt{1-x^2}\varphi(x). \quad (10)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x[y\varphi(y)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{(y-x)+x}{y-x} \varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy + xf(x). \end{aligned}$$

Поэтому из равенства (10) вытекает, что *необходимо*

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy + \mathcal{T}_x[\sqrt{1-y^2}f(y)] = -\sqrt{1-x^2}\varphi(x),$$

т. е.

$$\sqrt{1-x^2}\varphi(x) = -\mathcal{T}_x[\sqrt{1-y^2}f(y)] + C, \quad (11)$$

или в более подробной записи

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (12)$$

Здесь, в силу (7), постоянная

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy \quad (13)$$

имеет характер *произвольной постоянной*.

Смысл предыдущего результата состоит в следующем: если известно, что уравнение (1) обладает решением класса L_p ($p > 1$), то это решение должно иметь вид (12).

Следовательно, единственными нетривиальными решениями класса L_p ($p > 1$) однородного уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = 0 \quad (14)$$

являются функции вида $C(1-x^2)^{-1/2}$.

Остается доказать, что первый член правой части формулы (12) удовлетворяет уравнению (1). Для этого покажем сначала, что рассматриваемый член, т. е. функция

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}(y-x)} f(y) dy - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

принадлежит классу $4/3 - 0$, т. е. любому классу L_q при $1 < q < 4/3$, если только заданная функция $f(x)$ принадлежит классу $4/3 + 0$, т. е. классу L_p при $p > 4/3$ ¹⁾.

Поскольку

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi} (1-x^2)^{-1/2} \int_{-1}^1 \frac{(x+y)f(y)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} dy - \mathcal{F}_x[f(y)],$$

то единственная трудность состоит в определении класса, которому принадлежит функция

$$g(x) = \int_{-1}^1 \frac{(x+y)f(y)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} dy,$$

¹⁾ Г. Поллард (см. Pollard H., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 363) доказал, что если функция f принадлежит классу $p > 1$ на интервале $(-1, 1)$, то функция

$$g(x) = \int_{-1}^1 \left| 1 - \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^c \right| \cdot \left| \frac{f(y)}{x-y} \right| dy$$

принадлежит тому же самому классу p , если только $1/p - 1 < c < 1/p$.

Эта теорема при $c = 1/2$ показывает, что если наша функция f принадлежит классу $p > 1$, то функция $\varphi_0(x)$ принадлежит тому же самому классу p для $p < 2$ и классу $2 - 0$ для $p \geq 2$.

Следовательно, теорема, которая будет приведена на стр. 229, остается справедливой при том единственном условии, что данная функция $f(x)$ принадлежит классу L_p ($p > 1$) на интервале $(-1, 1)$.

так как множитель $(1-x^2)^{-1/2}$ принадлежит классу $2-0$, а $\mathcal{T}[f]$ (так же как и $H[f]$) принадлежит тому же классу, что и сама функция f^1). В силу неравенства Гельдера, имеем

$$|g(x)|^{p'} \leq \int_{-1}^1 \left[\frac{|x+y|}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} \right]^{p'} dy \times \\ \times \left[\int_{-1}^1 |f(y)|^p dy \right]^{p'/p} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right),$$

и поэтому

$$\int_{-1}^1 |g(x)|^{p'} dx \leq \\ \leq \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{|x+y|}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} \right]^{p'} dx dy \left[\int_{-1}^1 |f(y)|^p dy \right]^{p'/p}.$$

Следовательно, функция $g(x)$ принадлежит классу $L_{p'}$, если двойной интеграл в правой части конечен, т. е. если $p' < 4$,

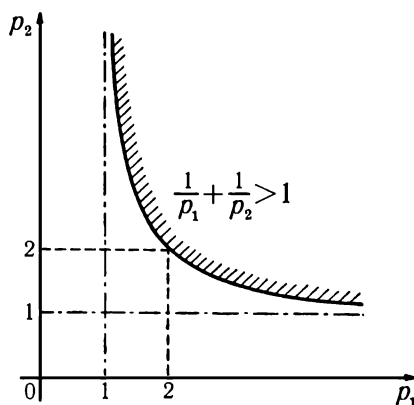


Рис. 13.

ибо подинтегральное выражение неограниченно возрастает (порядок роста $p'/2$) только в двух граничных точках

¹⁾ Титчмарш [44], стр. 176.

$x = y = \pm 1$ квадрата ($-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$). Но $p' < 4$, если $p > 4/3$; отсюда, вспоминая правило определения класса, которому принадлежит произведение двух функций¹⁾, заключаем, что произведение $(1-x^2)^{-1/2} g(x)$, а значит, и функция $\varphi_0(x)$ принадлежат классу L_q при $1 < q < 4/3$, коль скоро $p > 4/3$.

Теперь мы, применяя теорему о свертке (4) к паре функций

$$\varphi_1(x) \equiv \sqrt{1-x^2}, \quad \varphi_2(x) \equiv \varphi_0(x)$$

тем же способом, каким была выведена формула (12), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x \{ \sqrt{1-y^2} \mathcal{T}_y [\varphi_0(z)] \} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_0(y) dy - \\ &- \sqrt{1-x^2} \varphi_0(x) = C_0 - \sqrt{1-x^2} \varphi_0(x). \end{aligned}$$

Но $\varphi_0(x)$ можно выразить при помощи формулы (12), где $C = C_0$ ²⁾; поэтому

$$\mathcal{T}_x \{ \sqrt{1-y^2} \mathcal{T}_y [\varphi_0(z)] \} = C_0 + \mathcal{T}_x [\sqrt{1-y^2} f(y)] - C_0,$$

т. е.

$$\mathcal{T}_x [\sqrt{1-y^2} \{ \mathcal{T}_y [\varphi_0(z)] - f(y) \}] = 0.$$

Используя полученный ранее результат об однородном уравнении (14), видим, что обязательно

$$\sqrt{1-x^2} \{ \mathcal{T}_x [\varphi_0(y)] - f(x) \} = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$\mathcal{T}_x [\varphi_0(y)] - f(x) = \frac{K}{1-x^2}, \quad (15)$$

где K — соответствующая постоянная. Но при $K \neq 0$ функция в правой части соотношения (15) *неинтегри-*

¹⁾ Произведение двух функций $f_1 \in L_{p_1}$ и $f_2 \in L_{p_2}$ представляет собой функцию класса L_r , где $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$.

²⁾ Это допустимо, ибо $\mathcal{T}[(1-y^2)^{1/2}] \equiv 0$; поэтому член с постоянной C не играет никакой роли при проверке формулы (12).

руема на интервале $(-1, 1)$, в то время как функция в левой части принадлежит классу L_q при $1 < q < 4/3$; отсюда заключаем, что $K = 0$ и

$$\mathcal{T}_x[\Phi_0(y)] \equiv f(x)$$

почти всюду.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Если данная функция $f(x)$ принадлежит классу $4/3 + 0$, то уравнение профиля крыла самолета (1) допускает решение

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (16)$$

где C — произвольная постоянная, и первый член этого решения принадлежит по крайней мере классу $4/3 - 0$.

Более того, второй член, принадлежащий классу $2 - 0$, является самым общим решением соответствующего однородного уравнения в пространстве L_p ($p > 1$).

Если $f(x)$ принадлежит классу L_p при $1 < p \leq 4/3$, то мы уже не можем утверждать, что функция $\Phi_0(x)$ принадлежит классу $1 + 0$; однако остается справедливым следующее:

1) любое решение уравнения (1) класса $1 + 0$, если оно существует, обязательно имеет вид (16);

2) если функция $\Phi_0(x)$ принадлежит классу $1 + 0$, то она обязательно удовлетворяет уравнению (1)¹⁾.

Далее, интересно отметить, что если функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $2 + 0$, то ее \mathcal{T} -преобразование $f(x)$ (также принадлежащее классу $2 + 0$) обязательно удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx = 0. \quad (17)$$

¹⁾ Вторая работа Зэнгена, цитированная в начале этого параграфа, устраняет всякие сомнения относительно справедливости формулы (16) даже тогда, когда $f(x)$ принадлежит классу L_p , $1 < p \leq 4/3$. В этой работе автор «алгебраизировал» преобразование Гильберта на конечном интервале с помощью соответствующего функционального преобразования, связанного с последующей формулой (24).

В самом деле, в принятых предположениях мы можем применить формулу Парсеваля (2) к паре функций

$$\varphi_1(x) \equiv (1-x^2)^{-1/2}, \quad \varphi_2(x) \equiv \varphi(x)$$

и в силу (7) получить равенство (17).

Это позволяет нам представить решение (16) в другом виде:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C'}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (18)$$

ибо если выполняется условие (17), то мы имеем тождество

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{*1} \left[\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} - \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \right] \frac{f(y)}{y-x} dy = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{*1} \frac{x+y}{\sqrt{1-y^2}} f(y) dy = \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

где

$$k = \int_{-1}^1 \frac{yf(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Кроме того, независимо от условия (17), если по крайней мере одна из функций

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}}, \quad \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}$$

интегрируема, то, в силу тождеств

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \left(1 + \frac{y-x}{1+x}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(1 - \frac{y-x}{1-x}\right), \end{aligned}$$

решение (16) может быть записано еще в других видах:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \int_{-1}^{*1} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C''}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \varphi(x) &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{*1} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C'''}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Некоторые авторы¹⁾ при решении уравнения профиля используют тригонометрические ряды. Этот метод теоретически значительно менее удовлетворителен, чем изложенный; он может, однако, оказаться полезным на практике. В основе этого метода лежит формула

$$\int_0^{*\pi} \frac{\cos(n\eta) d\eta}{\cos \eta - \cos \xi} = \pi \frac{\sin(n\xi)}{\sin \xi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (20)$$

которая вместе с аналогичной формулой

$$\int_0^{*\pi} \frac{\sin(n+1)\eta \sin \eta}{\cos \eta - \cos \xi} d\eta = -\pi \cos(n+1)\xi \quad (21)$$

показывает, что \mathcal{T} -преобразование особенно просто действует на многочлены Чебышева²⁾

$$T_n(\cos \xi) = \cos(n\xi), \quad U_n(\cos \xi) = \frac{\sin(n+1)\xi}{\sin \xi};$$

мы имеем

$$\mathcal{T}_x[(1-y^2)^{-1/2} T_n(y)] = U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (22)$$

Поэтому, разлагая функцию $f(x)$ в ряд по многочленам $U_n(x)$, мы можем непосредственно получить (по крайней мере формально) соответствующее разложение функции $\varphi(y)$ в ряд по многочленам $T_n(y)$ с точностью до множителя $(1-y^2)^{-1/2}$.

Формула (22), а также аналогичная формула

$$\mathcal{T}_x[\sqrt{1-y^2} U_{n-1}(y)] = -T_n(x) \quad (23)$$

могут быть просто доказаны с помощью теоремы III предыдущего параграфа³⁾, если исходить соответственно

¹⁾ См., например, Гамель [10], стр. 145.

²⁾ См. Сеге [41], стр. 28 или Трикоми [48], стр. 186.

³⁾ Эти формулы являются частным случаем более общих формул, которые дают \mathcal{T} -преобразование многочленов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$, умноженных на соответствующую весовую функцию $(1-y)^\alpha (1+y)^\beta$, в виде линейной комбинации преобразуемой функции, и гипергеометрической функции $F[-n-\alpha-\beta, n+1; 1-\alpha; (1-x)/2]$, которая также сводится к многочлену, если $\alpha+\beta$ — целое число, большее $-n$. Относительно подробностей см. мою работу, цитированную в начале этого параграфа.

из аналитических функций

$$\Phi(z) = -(1-z^2)^{-1/2} [z - \sqrt{1-z^2}]^n, \quad \Phi(z) = [z - \sqrt{1-z^2} i]^n.$$

Этим же методом может быть доказана важная формула

$$\mathcal{T}_x \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^\alpha \right] = \operatorname{ctg}(\alpha\pi) \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha - \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} \quad (0 < |\alpha| < 1). \quad (24)$$

Мы исходим из аналитической функции

$$\Phi(z) = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^\alpha - 1, \quad (25)$$

которая удовлетворяет условию (4.2.9), так как для $|z+1| > 2$ имеем

$$\Phi(z) = -\alpha \frac{2}{z+1} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{2}{z+1} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3} \right) \left(\frac{2}{z+1} \right)^3 + \dots$$

Соотношение (24) является тогда непосредственным следствием формулы (4.2.10), так как на вещественной оси функция (25) сводится к функции $\Phi(x+i0)$, которая *вещественна* вне интервала $(-1, +1)$, а для $-1 < x < 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(x+i0) &= \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha e^{i\pi\alpha} - 1 = \\ &= \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha \cos(\alpha\pi) - 1 + i \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha \sin(\alpha\pi). \end{aligned} \quad (26)$$

Формула (24) представляет интерес, так как она показывает, что в некоторых случаях функция $\varphi(y)$, которая *неограниченно возрастает* как $A(1-y)^{-\alpha}$ или $A(1+y)^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) при $y \rightarrow \pm 1$, переводится \mathcal{T} -преобразованием в функцию, обладающую тем же свойством, с точностью до того обстоятельства, что A переходит в $\pm A \operatorname{ctg}(\alpha\pi)$.

Следующая *теорема об асимптотическом поведении* показывает, что это имеет место и в общем случае:

Пусть $\varphi(x)$ — функция класса L_p ($p > 1$), которую в малой окрестности $(-1, -1+\delta)$, $\delta > 0$, точки $x = -1$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = A(1+x)^{-\alpha} + \psi(x) \quad (0 \leq \alpha < 1), \quad (27)$$

где A — постоянная, а $\psi(x)$ обращается в нуль при $x = -1$ и удовлетворяет (равномерно) условию Липшица с положительным показателем ε , т. е.

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < K|x - x_0|^\varepsilon. \quad (28)$$

Тогда \mathcal{T} -преобразование $f(x)$ функции $\varphi(x)$ допускает асимптотическое представление

$$f(x) = A \operatorname{ctg}(\alpha\pi)(1+x)^{-\alpha} + O(1) \quad (x \rightarrow -1) \quad (29)$$

при $0 < \alpha < 1$ и асимптотическое представление

$$f(x) = -\frac{A}{\pi} \ln(1+x) + O(1) \quad (x \rightarrow -1) \quad (30)$$

при $\alpha = 0$.

Если вместо точки $x = -1$ рассматривать точку $x = +1$, то все остается без изменений, за исключением того, что $\operatorname{ctg}(\alpha\pi)$ заменяется на $-\operatorname{ctg}(\alpha\pi)$, а $-\ln(1+x)$ — на $+\ln(1-x)$.

Для доказательства заметим прежде всего, что если преобразование $f(x)$ стремится к бесконечности в точке $x = -1$, то его асимптотическое поведение для $x \rightarrow -1$ целиком зависит от значений функции $\varphi(x)$ в произвольно малой окрестности $(-1, -1+\delta)$, $\delta > 0$, этой точки. В самом деле, если для x , не принадлежащих интервалу $(-1+\delta, 1)$, мы положим

$$f(x) \equiv \mathcal{T}_x[\varphi(y)] = \frac{1}{\pi} \int_1^{\delta-1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\delta-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y-x} dy,$$

то второй член будет представлять собой аналитическую функцию, регулярную на всей z -плоскости, разрезанной вдоль интервала вещественной оси $(-1+\delta, 1)$; значит, эта функция будет регулярной и в окрестности точки $x = -1$.

Итак, мы можем предположить, что представление (27) справедливо на всем интервале $(-1, 1)$. Рассмотрим на этом интервале функцию $\varphi(x)$, представленную в виде

$$\varphi(x) = \frac{A}{2^\alpha} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha + \psi^*(x),$$

где функция

$$\psi^*(x) = \psi(x) + \frac{A}{(1+x)^\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-x}{2} \right)^\alpha \right]$$

удовлетворяет тем же условиям, что и $\psi(x)$, в частности, обращается в нуль при $x = -1$. Для $0 < \alpha < 1$ в силу (24) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x \left[\frac{A}{2^\alpha} \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^\alpha \right] &= \frac{A}{2^\alpha} \operatorname{ctg}(\alpha\pi) \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha - \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} = \\ &= A \operatorname{ctg}(\alpha\pi) (1+x)^{-\alpha} + O(1) \quad (x \rightarrow -1),\end{aligned}$$

а для $\alpha = 0$

$$\mathcal{T}_x[A] = A \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -A \ln(1+x) + O(1).$$

Поэтому, чтобы установить формулы (29) и (30), нам нужно только показать, что

$$\mathcal{T}_x[\psi^*(y)] = O(1) \quad (x \rightarrow -1).$$

Но это следует из условия (28), ибо

$$\pi \mathcal{T}_x[\psi^*(y)] = \psi^*(x) \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \int_{-1}^1 \frac{\psi^*(y) - \psi^*(x)}{y-x} dy$$

и

$$\begin{aligned}\left| \int_{-1}^1 \frac{\psi^*(y) - \psi^*(x)}{y-x} dy \right| &< K \int_{-1}^1 |y-x|^{\varepsilon-1} dy < \frac{K}{\varepsilon} 2^{\varepsilon+1}, \\ \left| \psi^*(x) \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right| &= \\ = |\psi^*(x) - \psi^*(-1)| \left| \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right| &< K(1+x)^\varepsilon \left| \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right|.\end{aligned}$$

Переход от случая $x \rightarrow -1$ к случаю $x \rightarrow 1$ не представляет никаких трудностей: нужно только в формуле (24) заменить α на $-\alpha$.

Наряду с преобразованием Гильберта \mathcal{T} на конечном интервале часто удобно рассматривать родственное преобразование

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-z} dt, \quad (31)$$

где z , вообще говоря, комплексное число, лежащее *вне* интервала вещественной оси $(-1, +1)$. Это преобразова-

ние переводит действительную функцию $\varphi(t)$ класса L_p ($p > 1$) в однозначную *аналитическую функцию*, регулярную на всей комплексной плоскости, *разрезанной вдоль интервала вещественной оси* $(-1, +1)$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую условию (4.2.9).

Преобразование (31) по существу не отличается от хорошо известного *преобразования Стильтьеса*¹⁾. Более точно, если мы положим

$$t = \frac{1-\tau}{1+\tau}, \quad z = \frac{1+s}{1-s}, \quad \frac{1}{1+\tau} \varphi\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right) = \psi(\tau), \\ -\frac{\pi}{1-s} F\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \Psi(x), \quad (32)$$

то равенство (31) примет вид

$$\Psi(s) = \int_0^\infty \frac{\psi(\tau)}{s+\tau} d\tau. \quad (33)$$

Таким образом, преобразование (31) переходит в преобразование Стильтьеса, и поэтому оно может быть обращено при помощи формулы²⁾

$$\frac{1}{2} [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)] = \frac{1}{2i} [F(x+i0) - F(x-i0)], \quad (34)$$

где, как обычно,

$$\varphi(x \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x \pm \varepsilon), \quad F(x \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x \pm i\varepsilon),$$

если только оба предела $\varphi(x \pm 0)$ существуют.

Другими словами, так как для вещественной функции φ величины $F(x+i0)$ и $F(x-i0)$ комплексно сопряжены, то мы можем утверждать, что

$$\operatorname{Im} F(x+i0) = \begin{cases} \varphi^*(x) & (-1 < x < 1), \\ 0 & (x < -1 \text{ или } x > 1), \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{2} [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]. \quad (36)$$

¹⁾ См. Уиддер [51], гл. VIII.

²⁾ См. Уиддер [51], стр. 340, теорема 76, где допускается также случай $p=1$.

Но, в силу теоремы III предыдущего параграфа, имеем ¹⁾
 $\operatorname{Re} F(x + i0) = H_x [\operatorname{Im} F(y + i0)] = \mathcal{T}_x[\varphi^*(y)] = \mathcal{T}_x[\varphi(y)];$
 отсюда

$$F(x + i0) = \mathcal{T}_x[\varphi(y)] + i\varphi^*(x) \quad (-1 < x < 1). \quad (37)$$

Эта формула, которую для непрерывной функции $\varphi(x)$ можно также записать в виде

$$F(x \pm i0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy \pm i\varphi(x), \quad (38)$$

является ключом к методу Карлемана, который будет рассматриваться в следующем параграфе ²⁾.

Важным следствием связи между преобразованием (31) и преобразованием Стильтьеса является возможность использования хорошо известных свойств преобразования Стильтьеса для изучения функции $F(x)$ на вещественной оси вне интервала $(-1, +1)$.

Например, так как преобразование Стильтьеса (33) переводит функцию класса L_p ($p > 1$) в такую же функцию ³⁾ и так как

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\Psi(\tau)|^p d\tau &= 2^{1-p} \int_{-1}^1 |\varphi(t)|^p (1+t)^{p-2} dt, \\ \int_0^\infty |\Psi(s)|^p ds &= \pi^p 2^{1-p} \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^\infty |F(z)|^p |1+z|^{p-2} dz, \end{aligned}$$

¹⁾ Напомним, что множество точек, где $\varphi^*(x) \neq \varphi(x)$, должно иметь меру нуль. См., например, G o f f m a n C., Real Functions, New York, 1953, стр. 195, теорема 6.

²⁾ Формулы (34), (38), так же как и формула (6) следующего параграфа, являются частными случаями формул Сохоцкого — Привалова. (См. П р и в а л о в И. И., Граничные свойства аналитических функций, М., 1950. — *Прим. перев.*)

³⁾ Это непосредственно следует из неравенства

$$\int_0^\infty |\Psi(s)|^p ds \leq \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right]^p \int_0^\infty |\Psi(\tau)|^p d\tau \quad (p > 1),$$

которое можно вывести из более общей формулы Уиддера [51], стр. 370, полагая $K(t, u) = (t+u)^{-1}$.

то отсюда следует, что если функция $\varphi(t)(1+t)^{1-2/p}$ принадлежит классу L_p на интервале $(-1, +1)$, то и функция $F(x)(1+x)^{1-2/p}$ принадлежит классу L_p на совокупности интервалов $(-\infty, -1) + (1, \infty)$.

В частности, если $\varphi(t)$ интегрируема с квадратом, то $F(x)$ также интегрируема с квадратом.

4.4. Сингулярные интегральные уравнения типа Карлемана¹⁾

Если задано сингулярное интегральное уравнение второго рода с ядром

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{y-x}, \quad (1)$$

то часто можно представить функцию $H(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \\ &= H(x, x) + (y-x)H'_y(x, x) + \frac{1}{2!}(y-x)^2 H''_{yy}(x, x) + \dots, \end{aligned}$$

так что

$$K(x, y) = \frac{H(x, x)}{y-x} + K^*(x, y), \quad (2)$$

где функция $K^*(x, y)$ ограничена. Поэтому главной задачей при изучении интегральных уравнений с ядрами вида (2) является решение *характеристического уравнения*

$$a(x)\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x), \quad (3)$$

где

$$a(x) = \frac{1}{H(x, x)}. \quad (4)$$

Уравнение (3) мы будем называть *уравнением типа Карлемана*, так как оно рассматривалось в 1922 г.

¹⁾ Содержание настоящего параграфа в основном совпадает с содержанием моей работы «Sulle equazioni integrali del tipo di Carleman» [Ann. mat. pura ed appl. (4), 39 (1955), 229—244].

Т. Карлеманом¹⁾, который дал изящное явное решение этого уравнения в замкнутом виде.

Рассматривая уравнение (3), Карлеман применяет два различных метода, основанных на теории аналитических функций [этим же методами исследуется Карлеманом уравнение, сходное с (3), в котором под знаком интеграла стоит разность $\varphi(y) - \varphi(x)$]. Мы рассмотрим лишь второй из этих методов, состоящий главным образом в «алгебраизации» уравнения (3) с помощью указанного ранее преобразования (4.3.31)²⁾. Ниже этот метод излагается лишь эвристически. Было бы достаточно трудно сделать все шаги последующих рассуждений строгими, особенно если отбросить ненужные по существу ограничения (как, например, предположение о непрерывности неизвестной функции). Тем не менее результаты верны.

Карлеман³⁾ заметил, что если положить

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y-z} dy, \quad (5)$$

то, в силу (4.3.34), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} F(x+i0) - F(x-i0) &= 2i\varphi(x), \\ F(x+i0) + F(x-i0) &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем для простоты мы считаем функцию $\varphi(x)$ непрерывной на открытом интервале $(-1, +1)$. Поэтому урав-

¹⁾ Carleman T., Sur la résolution de certaines équations intégrales, *Arkiv for Mat., Astron. och Fysik*, 16 (1922), 19.

Таким образом, уравнение типа Карлемана — это интегральное уравнение второго рода с сингулярным ядром

$$\frac{1}{a(x)} \frac{1}{y-x}.$$

В случае уравнения *первого* рода это ядро по существу не отличается от ядра $(y-x)^{-1}$ уравнения профиля крыла самолета, однако, в случае уравнения *второго* рода имеется ряд отличий.

²⁾ Аналогичным образом при помощи преобразования Лапласа было алгебраизовано уравнение типа свертки из § 1.8.

³⁾ Придерживаясь одних и тех же обозначений на протяжении всей книги, мы иногда изменяем обозначения Карлемана.

нение (3) принимает «алгебраическую» форму

$$[a(x) - \lambda\pi i] F(x + i0) - [a(x) + \lambda\pi i] F(x - i0) = 2if(x). \quad (7)$$

Это уравнение можно упростить, полагая

$$F(z) = e^{T(z)} U(z), \quad (8)$$

где функция $T(z)$ удовлетворяет условию

$$[a(x) - \lambda\pi i] e^{T(x+i0)} = [a(x) + \lambda\pi i] e^{T(x-i0)}. \quad (9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} U(x+i0) - U(x-i0) &= \frac{2if(x)}{a(x) - \lambda\pi i} e^{-T(x+i0)} = \\ &= \frac{2if(x)}{a(x) + \lambda\pi i} e^{-T(x-i0)}, \end{aligned}$$

откуда, если возьмем среднее геометрическое из двух равных между собой выражений для разности, стоящей в левой части, получаем что

$$\begin{aligned} U(x+i0) - U(x-i0) &= \\ &= \frac{2if(x)}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [T(x+i0) + T(x-i0)] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Чтобы определить функцию $T(z)$, заметим, что в силу (9)

$$T(x+i0) - T(x-i0) = \ln \frac{a(x) + \lambda\pi i}{a(x) - \lambda\pi i} = 2i \operatorname{arctg} \frac{\lambda\pi}{a(x)}. \quad (11)$$

Поэтому (хотя это и не обязательно) мы *можем* положить

$$T(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta(t)}{t-z} dt, \quad (12)$$

где

$$\theta(x) = \operatorname{arctg}_{(0, \pi)} \frac{\lambda\pi}{a(x)}. \quad (13)$$

В самом деле, в силу (4.3.34) отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2i} [T(x+i0) - T(x-i0)] = \theta(x) = \operatorname{arctg}_{(0, \pi)} \frac{\lambda\pi}{a(x)},$$

в согласии с (11).

С другой стороны, учитывая (4.3.34), имеем

$$\frac{1}{2} [T(x+i0) + T(x-i0)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\theta(t)}{t-x} dt;$$

поэтому уравнение (10) принимает вид

$$U(x+i0) - U(x-i0) = \frac{2i}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} e^{-\tau(x)} f(x),$$

где

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\theta(t)}{t-x} dt = \mathcal{T}_x[\theta(t)], \quad (14)$$

и этому уравнению удовлетворяет функция

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(t)} f(t)}{\sqrt{a^2(t) + \lambda^2 \pi^2}} \frac{dt}{t-z}. \quad (15)$$

Наконец мы определяем φ из первого уравнения (6), которое в силу (12) и (15) дает

$$\begin{aligned} 2i\varphi(x) &= e^{T(x+i0)} U(x+i0) - e^{T(x-i0)} U(x-i0) = \\ &= e^{\tau(x)+i\theta(x)} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)} f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2 \pi^2}} \frac{dy}{y-x} + i \frac{e^{-\tau(x)} f(x)}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} \right] - \\ &- e^{\tau(x)-i\theta(x)} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)} f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2 \pi^2}} \frac{dy}{y-x} - i \frac{e^{-\tau(x)} f(x)}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} \right]. \end{aligned}$$

После некоторых элементарных преобразований мы можем записать это решение в виде

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)} f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2 \pi^2}} \frac{dy}{y-x}, \quad (16)$$

где, согласно (13) и (14),

$$\tau(x) = \mathcal{T}_x[\theta(y)], \quad \theta(y) = \operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(y)}.$$

Мы изложили метод Карлемана только как *эвристический* путь получения формулы (16). Сейчас мы выведем аналогичную формулу (30')¹⁾, используя методы предыдущего параграфа. Прежде всего нам потребуется \mathcal{T} -преобразование функции

$$A(x) = \frac{e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} = \frac{\exp \left\{ \mathcal{T}_x \left[\operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(y)} \right] \right\}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}}. \quad (17)$$

Оно может быть найдено из теоремы III § 4.2 и само по себе представляет большой интерес. Мы покажем, что

$$\lambda \pi \mathcal{T}_x [A(y)] = a(x) A(x) - \operatorname{sgn} \lambda \quad (\lambda \neq 0, \quad -1 < x < 1), \quad (18)$$

предполагая для простоты, что *функция $a(x)$ непрерывна на основном интервале $(-1, +1)$* .

С этой целью введем аналитическую функцию

$$\Phi(z) = e^{T(z)} - 1,$$

где функция $T(z)$ уже определена формулой (12). В силу (4.3.38) и непрерывности $\theta(x)$, даже если $a(x)$ обращается в нуль в какой-нибудь точке, функция $\Phi(z)$ на вещественной оси имеет вид

$$\Phi(x + i0) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\theta(t)}{t-x} dt + i\theta(x) \right\} - 1 & (-1 < x < 1), \\ \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta(t)}{t-x} dt \right\} - 1 & (x < -1, x > 1). \end{cases}$$

Это показывает, что для любого положительного p как вещественная, так и мнимая часть функции $\Phi(x + i0)$ обязательно принадлежат классу L_p на интервале $-1 < x < 1$. Вне этого интервала мнимая часть функции $\Phi(x + i0)$ тождественно равна нулю, а ее вещественная часть может быть представлена рядом

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta(t)}{t-x} dt \right\} - 1 = \frac{M_0}{\pi x} + \frac{1}{\pi x^2} \left(M_1 + \frac{1}{2\pi} M_0^2 \right) + \dots,$$

¹⁾ В формуле (16) отсутствует последний член формулы (30'), содержащий произвольную постоянную C' .

где M_0, M_1, \dots — последовательные моменты функции $\theta(x)$ ¹⁾. Итак, и мнимая и вещественная части функции $\Phi(x+i0)$ принадлежат классу L_p ($p > 1$) на всей вещественной оси, и поэтому функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (4.2.9). Снова обозначая функцию (14) через $\tau(x)$, получаем, согласно (4.2.10),

$$e^{\tau(x)} \cos \theta(x) - 1 = \mathcal{F}_x[e^{\tau(y)} \sin \theta(y)].$$

Вспоминая, что $0 < \theta(x) < \pi$, или, более точно,

$$0 < \theta(x) < \frac{1}{2}\pi \quad (\lambda a(x) \geq 0), \quad \frac{1}{2}\pi \leq \theta(x) < \pi \quad (\lambda a(x) \leq 0),$$

замечаем, что (для $\lambda \neq 0$) будем также иметь

$$\sin \theta(x) = \frac{|\lambda| \pi}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}},$$

$$\cos \theta(x) = \pm \frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} = \frac{a(x) \operatorname{sgn} \lambda}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}},$$

где, как выше, всегда берется положительное значение корня. Поэтому после умножения на $\operatorname{sgn} \lambda$ последнее равенство предыдущего абзаца можно записать в виде

$$\frac{a(x) e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} - \operatorname{sgn} \lambda = \lambda \pi \mathcal{F}_x \left[\frac{e^{\tau(y)}}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2 \pi^2}} \right],$$

а это и есть формула (18), которую требовалось доказать.

Если в предшествующем рассуждении функцию $\theta(x)$ заменить функцией $\theta(x) - \pi$, то функция $\tau(x)$ перейдет в функцию

$$\tau(x) - \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right),$$

и, следовательно, $A(x)$ перейдет в

$$\frac{1+x}{1-x} A(x),$$

¹⁾ Полагаем

$$M_n = \int_{-1}^1 \theta(t) t^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Заметим, что постоянный член -1 должен присутствовать для того, чтобы функция $\Phi(x+i0)$ была равна нулю на бесконечности.

а знаки $\cos \theta(x)$ и $\sin \theta(x)$ изменятся на противоположные. Поэтому в дополнение к равенству (18) мы можем написать второе равенство

в

$$\lambda \pi \mathcal{T}_x \left[\frac{1+y}{1-y} A(y) \right] = a(x) \frac{1+x}{1-x} A(x) + \operatorname{sgn} \lambda, \quad (19)$$

и, складывая его с (18), получаем после деления на 2

$$a(x) \frac{A(x)}{1-x} - \lambda \pi \mathcal{T}_x \left[\frac{A(y)}{1-y} \right] = 0. \quad (20)$$

Уже эта последняя формула содержит интересный результат о главной задаче настоящего параграфа: *однородное уравнение*

$$a(x) \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = 0 \quad (21)$$

всегда допускает нетривиальное решение

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{A(x)}{1-x}. \quad (22)$$

Более того, мы можем показать, что *если функция $a(x)$ не только непрерывна (что мы уже предположили), но удовлетворяет также условию Липшица с положительным показателем ε на обоих сколь угодно малых интервалах $(-1, -1+\delta)(1-\delta, 1)$, $\delta > 0$, то функция $\varphi_\lambda(x)$, не смотря на делитель $1-x$, принадлежит классу L_p ($p > 1$).*

В самом деле, замечая, что для любой пары точек x, x_0 из интервала $(-1, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \theta(x) - \theta(x_0) &= \operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(x)} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(x_0)} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{a(x_0)}{\lambda \pi} - \operatorname{arctg} \frac{a(x)}{\lambda \pi} \\ &\quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно ¹⁾,

$$|\theta(x) - \theta(x_0)| < \left| \frac{a(x) - a(x_0)}{\lambda \pi} \right|,$$

¹⁾ Напомним, что

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

мы видим, что наше допущение относительно функции $a(x)$ позволяет нам применить теорему об асимптотическом поведении из предыдущего параграфа к функции $\tau(x) = \mathcal{T}_x[\theta(y)]$. Если положить

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\pi} \theta(-1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(-1)}, \\ \beta &= \frac{1}{\pi} \theta(1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda \pi}{a(1)},\end{aligned}\quad (23)$$

то можно написать

$$\left. \begin{aligned}\tau(x) &= -\alpha \ln(1+x) + O(1) & (x \rightarrow -1), \\ \tau(x) &= \beta \ln(1-x) + O(1) & (x \rightarrow 1).\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}A(x) &= O[(1+x)^{-\alpha}] & (x \rightarrow -1), \\ A(x) &= O[(1-x)^{\beta}] & (x \rightarrow 1)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{\lambda}(x) &= O[(1+x)^{-\alpha}] & (x \rightarrow -1), \\ \varphi_{\lambda}(x) &= O[(1-x)^{-(1-\beta)}] & (x \rightarrow 1).\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Это показывает, что функция $\varphi_{\lambda}(x)$ принадлежит классу L_p для $p < 1/\gamma$, где

$$\gamma = \max(\alpha, 1 - \beta). \quad (26)$$

Далее, важно отметить, что замена λ на $-\lambda$ переводит $\theta(x)$ в $\pi - \theta(x)$ и $A(x)$ в

$$\frac{\exp\left\{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \tau(x)\right\}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} = \frac{1-x}{1+x} A^*(x),$$

где

$$\frac{e^{-\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2}} = A^*(x). \quad (27)$$

Поэтому мы можем сказать, что замена λ на $-\lambda$ переводит функцию

$$\frac{1+x}{1-x} A(x)$$

в функцию $A^*(x)$. Отсюда следует, что

$$a(x) A^*(x) + \lambda \pi \mathcal{T}_x[A^*(y)] = \operatorname{sgn} \lambda. \quad (28)$$

Чтобы строго обосновать решение Карлемана (16) и доказать, что функции $C\varphi_\lambda(x)$ являются единственными нетривиальными решениями однородного уравнения (21), мы будем исходить из данного уравнения (3), которое после «композиции» с сингулярным ядром

$$\frac{1-x}{\pi} \frac{A^*(x)}{y-x}$$

переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x\{(1-y) A^*(y) [a(y) \varphi(y) - f(y)]\} = \\ = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{(1-z) A^*(z)}{z-x} dz \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-z} dy. \end{aligned}$$

Так как функция $(1-x) A^*(x)$ ограничена¹⁾, она принадлежит классу $L_{p'}$ при произвольно большом p' . Поэтому, если неизвестная функция φ принадлежит какому-нибудь классу L_p при $p > 1$, то можно воспользоваться формулой (4.2.22) для перемены порядка интегрирования «со звездочкой» в правой части. Итак, мы можем также написать

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x\{(1-y) A^*(y) [a(y) \varphi(y) - f(y)]\} = \\ = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy \int_{-1}^{*1} \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \right) (1-z) A^*(z) dz - \\ - \lambda \pi (1-x) A^*(x) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{*1} \{ \mathcal{T}_x[(1-z) A^*(z)] - \\ - \mathcal{T}_y[(1-z) A^*(z)] \} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy - \lambda \pi (1-x) A^*(x) \varphi(x). \end{aligned}$$

¹⁾ В самом деле, эта функция непрерывна на открытом интервале $(-1, +1)$ и, в силу (24), в окрестности концов интервала имеют место оценки

$$\begin{aligned} (1-x) A^*(x) &= O[(1+x)^a] & (x \rightarrow -1), \\ (1-x) A^*(x) &= O[(1-x)^{1-\beta}] & (x \rightarrow 1). \end{aligned}$$

Но \mathcal{T} -преобразование функции $(1-x)A^*(x)$ можно легко подсчитать с помощью формулы (28). Именно, мы находим

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)] &= (1-x)\mathcal{T}_x[A^*(y)] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 A^*(y) dy = \\ &= \frac{1-x}{\lambda\pi} [\operatorname{sgn} \lambda - a(x)A^*(x)] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 A^*(y) dy\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x[(1-z)A^*(z)] - \mathcal{T}_y[(1-z)A^*(z)] &= \\ = \frac{y-x}{\lambda\pi} \operatorname{sgn} \lambda + \frac{1}{\lambda\pi} [(1-y)a(y)A^*(y) - (1-x)a(x)A^*(x)].\end{aligned}$$

Учитывая этот результат, можно переписать предыдущее уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x\{(1-y)A^*(y)[a(y)\varphi(y) - f(y)]\} &= \\ = \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy + \mathcal{T}_x[(1-y)a(y)A^*(y)\varphi(y)] - \\ - (1-x)a(x)A^*(x)\mathcal{T}_x[\varphi(y)] - \lambda\pi(1-x)A^*(x)\varphi(x).\end{aligned}$$

Так как в обеих частях этого уравнения выступают \mathcal{T} -преобразования *одного и того же* выражения $(1-y)a(y) \times \times A^*(y)\varphi(y)$ и так как \mathcal{T} -преобразование функции $\varphi(y)$ можно исключить, используя уравнение (3), то мы получаем

$$\begin{aligned}-\mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)] &= \\ = -\frac{1-x}{\lambda\pi} a(x)A^*(x)[a(x)\varphi(x) - f(x)] - \\ - \lambda\pi(1-x)A^*(x)\varphi(x) + \frac{C}{\lambda\pi},\end{aligned}$$

где C — (произвольная) постоянная. Но мы имеем также

$$\begin{aligned}-\frac{1-x}{\lambda\pi} a^2(x)A^*(x)\varphi(x) - \lambda\pi(1-x)A^*(x)\varphi(x) &= \\ = -\frac{1-x}{\lambda\pi} [a^2(x) + \lambda^2\pi^2] A^*(x)\varphi(x) = -\frac{1-x}{\lambda\pi} \frac{\varphi(x)}{A(x)};\end{aligned}$$

отсюда заключаем, что из нашего уравнения обязательно следует

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \lambda\pi \frac{A(x)}{1-x} \mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)] + C \frac{A(x)}{1-x}. \quad (29)$$

Более того, если существует \mathcal{T} -преобразование функции $A^*(y)f(y)$ ¹, то мы можем написать

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)] = \\ & = (1-x) \mathcal{T}_x[A^*(y)f(y)] - \int_{-1}^1 A^*(y)f(y) dy, \end{aligned}$$

и предыдущее решение принимает форму Карлемана

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \lambda\pi A(x) \mathcal{T}_x[A^*(y)f(y)] + C' \frac{A(x)}{1-x}, \quad (30)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \lambda \frac{e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}} \int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)}f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2\pi^2}} \frac{dy}{y-x} + \\ & + C' \frac{e^{\tau(x)}}{(1-x)\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}}, \end{aligned} \quad (30')$$

где через C' обозначена произвольная постоянная.

Значение предыдущего результата заключается в следующем: если уравнение (3), имеет решение $\varphi(x)$ из класса L_p ($p > 1$), то это решение обязательно имеет вид (29) — (30). Поэтому уже сейчас мы можем утверждать, что единственные нетривиальные решения класса L_p ($p > 1$) однородного уравнения (21) имеют вид $S\varphi_\lambda(x)$, но пока мы еще далеки от уверенности в том, что функция

$$F(x) \equiv \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \lambda\pi \frac{A(x)}{1-x} \mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)],$$

¹ В силу свойств $A^*(y)$ вблизи $y = \pm 1$ достаточным условием существования такого преобразования является принадлежность функции $f(y)$ классу L_q при $q > 1/(1-\beta)$.

которую мы также можем записать в виде

$$F(x) \equiv \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2 \pi^2} + \lambda \pi \Phi_\lambda(x) \mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)], \quad (31)$$

на самом деле удовлетворяет уравнению (3).

Чтобы получить такую уверенность заметим, во-первых, что если заданная функция $f(x)$ принадлежит классу L_q ($q > 1$), то, так как функция $(1-x)A^*(x)$ ограничена, функции $(1-y)A^*(y)f(y)$ и $\mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)]$, так же как и первое слагаемое функции $F(x)$, принадлежат классу L_q . Поэтому (мы уже отмечали это), учитывая еще, что $\Phi_\lambda(x)$ принадлежит классу $1/\gamma - 0$, где γ определяется формулой (26), мы можем быть уверены, что функция $F(x)$ принадлежит классу L_{q^*} ($q^* > 1$), коль скоро ¹⁾

$$q^* < \frac{q}{1+\gamma q}, \quad q > \frac{1}{1-\gamma}. \quad (32)$$

Во-вторых, заметим, что если мы при соответствующем значении постоянной C положим

$$\Phi_0(x) = F(x) + C\Phi_\lambda(x)$$

и обратим порядок рассуждений, которые привели нас к формуле (29), то получим равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_x\{(1-y)A^*(y)[a(y)\Phi_0(y) - f(y)]\} = \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^{*1} \Phi_0(y) dy \int_{-1}^{*1} \frac{(1-z)A^*(z)}{(z-x)(y-z)} dz - \lambda \pi (1-x)A^*(x)\Phi_0(x). \end{aligned}$$

Но, так как функция $(1-x)A^*(x)$ ограничена и функция $\Phi_0(x)$ принадлежит классу L_{q^*} при $q^* > 1$ ²⁾, мы можем применить формулу (4.2.22) и придать предыдущему равенству вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_x\{(1-y)A^*(y)[a(y)\Phi_0(y) - f(y)]\} = \\ &= \lambda \cdot \mathcal{T}_x \left[(1-z)A^*(z) \int_{-1}^{*1} \frac{\Phi_0(y)}{y-z} dy \right], \end{aligned}$$

¹⁾ Для краткости мы не будем останавливаться на том, что методом, сходным с одним из методов предыдущего параграфа, можно было бы доказать более сильный результат.

²⁾ Напомним, что класс $1/\gamma - 0$, которому принадлежит член $C\Phi_\lambda(x)$, «выше» класса q^* функции $F(x)$, так как $1/q^* > \gamma$.

или

$$\mathcal{T}_x \left\{ (1-z) A^*(z) \left[a(z) \varphi_0(z) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi_0(y)}{y-z} dy - f(z) \right] \right\} = 0.$$

Применяя результаты предыдущего параграфа, получаем

$$a(x) \varphi_0(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{\varphi_0(y)}{y-x} dy - f(x) = \frac{K}{(1-x)^{3/2} (1+x)^{1/2} A^*(x)}, \quad (33)$$

где K — некоторая постоянная. Для $K \neq 0$ имеем

$$\frac{K}{(1-x)^{3/2} (1+x)^{1/2} A^*(x)} = \begin{cases} O[(1+x)^{-(\alpha+1/2)}] & (x \rightarrow -1), \\ O[(1-x)^{-(3/2-\beta)}] & (x \rightarrow 1). \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что при $\alpha \geq 1/2$ или $\beta \leq 1/2$, а также при $\alpha \geq 1/2$, $\beta \leq 1/2$ постоянная K обязательно равна нулю; в противном случае функция в правой части формулы (33) не принадлежала бы ни одному классу L_p при $p \geq 1$ ¹⁾, в то время как левая часть принадлежит классу L_{q^*} при $q^* > 1$. Остается случай $0 < \alpha < 1/2$, $1/2 < \beta < 1$, в котором $\gamma > 1/2$, и, следовательно, правая часть равенства (33) является функцией класса L_p при

$$p = \min \left(\frac{1}{\alpha + 1/2}, \frac{1}{3/2 - \beta} \right) < 2,$$

так как обе дроби принимают значения из открытого интервала (1, 2).

Левая часть равенства (33) является, однако, функцией класса

$$q > \frac{1}{1-\gamma} > 2,$$

так как оба члена с функцией $\varphi_0(x)$ принадлежат классу $q^* \geq q$, и член $f(x)$ — функция класса q .

Если $K \neq 0$, то также получается противоречие. Поэтому во всех случаях $K = 0$. Мы видим, что функция

¹⁾ Вспомним, что показатели $-(\alpha + 1/2)$ и $-(3/2 - \beta)$ нельзя заменять большими.

$\varphi_0(x)$, а следовательно, и функция $F(x)$ на самом деле удовлетворяют уравнению (3).

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Если: (I) коэффициент $a(x)$ непрерывен на основном интервале $(-1, 1)$ и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем ϵ на обоих произвольно малых интервалах $(-1, -1 + \delta)$ и $(1 - \delta, 1)$, где $\delta > 0$; (II) заданная функция $f(x)$ принадлежит классу L_q при

$$q > \frac{1}{1-\gamma}, \quad \gamma = \max(\alpha, 1-\beta), \quad (34)$$

то функция

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \\ & + \lambda\pi \frac{A(x)}{1-x} \mathcal{T}_x[(1-y)A^*(y)f(y)] + C \frac{A(x)}{1-x} \end{aligned} \quad (35)$$

(где C — произвольная постоянная), принадлежащая по крайней мере классу L_q при

$$q^* < \frac{q}{1+\gamma q}, \quad (36)$$

является решением сингулярного уравнения (3).

Более того, функции вида

$$C \frac{A(x)}{1-x}$$

являются единственными нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения в пространстве L_p ($p > 1$).

Если $q > 1/(1-\beta)$, то решению (35) можно также придать форму Карлемана (30)–(30').

В частности, если принять $a(x) \equiv 0$, откуда вытекает, что $\theta(x) = \pi/2$, $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$, мы опять получим результаты предыдущего параграфа. Единственное отличие состоит в том, что сейчас у нас имеется условие $q > 2$, тогда как там было более слабое условие $q > 4/3$, полученное на основании более аккуратного определения класса, которому принадлежит функция $F(x)$.

Недавно С. Г. Михлин¹⁾ применил метод Карлемана для решения сингулярного интегрального уравнения, встреченного (и решенного другим, менее простым методом) мною много лет назад в моих исследованиях по уравнениям в частных производных смешанного типа.

Другие советские математики (например, И. Н. Векуа, Н. И. Мухелишвили и В. Д. Купрадзе) также пользовались методом Карлемана, особенно в применении к уравнениям с интегралом, взятым по замкнутой кривой комплексной плоскости в смысле главного значения. Эти исследования изложены в монографии Н. И. Мухелишвили [32], недавно переведенной на английский язык, а также в ряде журнальных статей²⁾.

4.5. Общие замечания о нелинейных интегральных уравнениях

Нелинейные интегральные уравнения настолько разнообразны, что даже их классификация нелегка. Два типа таких уравнений, однако, имеют первостепенное значение:

1) уравнения, в которых подинтегральное выражение или член, не стоящий под знаком интеграла, или они оба зависят нелинейным образом от неизвестной функции $\varphi(x)$, т. е. уравнения вида

$$\int_0^1 H[x, y; \varphi(y)] dy = g[x, \varphi(x)]; \quad (1)$$

2) уравнения, содержащие существенно *нелинейный функционал*, например (вторую) «интегральную степень»

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y, z) \varphi(y) \varphi(z) dy dz. \quad (2)$$

Несмотря на то, что одна из важнейших работ в этой области относится к уравнениям второго типа³⁾, я считаю,

¹⁾ Михлин С. Г., Об интегральном уравнении Ф. Трикоми, Докл. АН СССР, 59 (1948), 1053—1056.

²⁾ Особенно см. Тр. Тбилисс. матем. ин-та, 10 (1942).

³⁾ Schmidt E. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Ann., 65 (1908), 370—399.

что больший интерес представляют уравнения первого типа, в частности такие, в которых функция H является произведением некоторой функции K , зависящей только от x и y , на функцию L , зависящую только от y и $\varphi(y)$, т. е. уравнения вида

$$\int_0^1 K(x, y) L[y, \varphi(y)] dy = g[x, \varphi(x)]. \quad (3)$$

Уравнения этого вида рассматриваются в прекрасной работе А. Гаммерштейна¹⁾. Если уравнение

$$g[x, \varphi(x)] = \psi(x)$$

может быть решено относительно $\varphi(x)$, то уравнение вида

$$\psi(x) + \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi(y)] dy = 0 \quad (4)$$

можно рассматривать как каноническую форму *уравнений типа Гаммерштейна*. Это преобразование показывает, что различие между однородными и неоднородными уравнениями, столь важное в теории линейных уравнений, не имеет почти никакого значения в нелинейном случае. Однако важно знать, равна или не равна тождественно нулю функция $f(y, u)$ при $u = 0$, ибо только в первом случае уравнение (4) допускает «тривиальное» решение $\psi(x) \equiv 0$.

Для решения уравнения (4) мы можем применить метод последовательных приближений. Например, можем положить $\psi_0(x) \equiv 0$ и последовательно

$$\psi_{n+1}(x) = - \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi_n(y)] dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Однако а priori сходимость можно гарантировать лишь при наложении довольно жестких условий на функции K и f . Более точно, мы должны допустить что:

¹⁾ Hammerstein A., Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta Math.*, 54 (1930), Ivar Fredholm in memoriam, 117—176.

(I) ядро K принадлежит классу L_2 , или по крайней мере функция

$$A^2(x) = \int_0^1 K^2(x, y) dy \quad (6)$$

существует почти всюду на интервале $(0, 1)$ и интегрируема на этом интервале¹⁾;

(II) функция $f(y, u)$ равномерно удовлетворяет условию Липшица вида

$$|f(y, u_1) - f(y, u_2)| < C(y) |u_1 - u_2|; \quad (7)$$

(III) функция $f(y, 0)$ принадлежит классу L_2 . В этих предположениях последовательность

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots \quad (8)$$

сходится почти всюду к решению уравнения (4), если только

$$\int_0^1 A^2(x) C^2(x) dx = M^2 < 1. \quad (9)$$

Более того, эта сходимость почти равномерна в смысле § 2.1.

В самом деле, из соотношений (5) следует, что

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)| &\leq \int_0^1 |K(x, y)| |f[y, \psi_n(y)] - f[y, \psi_{n-1}(y)]| dy < \\ &< \int_0^1 |K(x, y)| C(y) |\psi_n(y) - \psi_{n-1}(y)| dy, \end{aligned}$$

¹⁾ Это слабее, чем требование $K \in L_2$, ибо при $K(x, y) \in L_2$ аналогичное условие должно выполняться и тогда, когда x и y меняются местами.

откуда, применяя неравенство Буняковского—Шварца, получаем

$$\begin{aligned} & |\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)|^2 < \\ & < \int_0^1 K^2(x, y) dy \int_0^1 C^2(y) [\psi_n(y) - \psi_{n-1}(y)]^2 dy = \\ & = A^2(x) \int_0^1 C^2(y) [\psi_n(y) - \psi_{n-1}(y)]^2 dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

а для $n = 0$ имеем

$$\psi_1^2(x) \leq A^2(x) \int_0^1 f^2(y, 0) dy,$$

или

$$\psi_1^2(x) \leq c^2 A^2(x),$$

где через c обозначена норма функции $f(y, 0)$. Отсюда последовательно выводим неравенства

$$\begin{aligned} [\psi_2(x) - \psi_1(x)]^2 &< c^2 A^2(x) \int_0^1 A^2(y) C^2(y) dy = c^2 M^2 A^2(x), \\ [\psi_3(x) - \psi_2(x)]^2 &< c^2 M^2 A^2(x) \int_0^1 A^2(y) C^2(y) dy = c^2 M^4 A^2(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и в общем виде

$$[\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)]^2 < c^2 M^{2n} A^2(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Это показывает, что ряд

$$\psi_1(x) + [\psi_2(x) - \psi_1(x)] + [\psi_3(x) - \psi_2(x)] + \dots \quad (10)$$

мажорируется рядом

$$c A(x) (1 + M + M^2 + \dots),$$

который сходится для $M < 1$; поэтому при выполнении перечисленных условий последовательность (8) сходится почти равномерно.

Обычным путем нетрудно показать, что сумма ряда (10), т. е. предел $\psi_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$, является решением данного уравнения (4).

Приведенные условия, особенно неравенство (9), существенны, так как существуют очень простые нелинейные интегральные уравнения, которые вообще не имеют решений. Например, если

$$K(x, y) = \alpha(x) \alpha(y), \quad (11)$$

так что обязательно

$$\psi(x) = \xi \alpha(x) \quad (\xi = \text{const}),$$

то уравнение (4) эквивалентно нелинейному уравнению относительно ξ

$$\xi + \int_0^1 \alpha(y) f[y, \xi \alpha(y)] dy = 0. \quad (12)$$

Очень легко построить примеры, в которых это уравнение не допускает никаких вещественных решений. Так, если

$$f(y, u) = \frac{1}{2} (1 + u^2),$$

то уравнение (12) принимает вид

$$\xi^2 \int_0^1 \alpha^3(y) dy + 2\xi + \int_0^1 \alpha(y) dy = 0.$$

Это квадратное уравнение не имеет вещественных решений, если

$$\int_0^1 \alpha^2(y) dy > 1, \quad (13)$$

ибо в силу неравенства Буняковского—Шварца

$$1 - \int_0^1 \alpha^3(y) dy \int_0^1 \alpha(y) dy \leq 1 - \left[\int_0^1 \alpha^2(y) dy \right]^2.$$

С другой стороны, если $\alpha(y)$ всегда положительно и

$$f(y, u) = u \sin \frac{u}{\alpha(y)},$$

то уравнение (12) принимает вид

$$1 + \sin \xi \int_0^1 \alpha^2(y) dy = 0,$$

и при выполнении условия (13) оно обладает *бесконечным числом вещественных решений*.

Наконец, мы укажем *необходимое* условие того, что точка $\lambda = \lambda_0$ является точкой бифуркации для *данного* решения $\psi_0(x)$ нелинейного уравнения (с параметром λ) вида

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi(y)] dy = 0, \quad (14)$$

т. е. условие существования слева или справа от точки λ_0 на оси λ (по крайней мере) одного такого решения $\psi_1(x)$ рассматриваемого уравнения, что частное

$$\frac{\psi_1(x) - \psi_0(x)}{\lambda - \lambda_0}$$

при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к предельной функции $\chi_0(x)$, не почти всюду равной нулю. Если производная f'_u функции $f(y, u)$ по u существует и непрерывна, то такое условие заключается в том, что λ_0 *должно быть собственным значением ядра Фредгольма*

$$K^*(x, y) = -K(x, y) f'_u[y, \psi_0(x)]. \quad (15)$$

Чтобы показать это, положим

$$\lambda - \lambda_0 = \varepsilon, \quad \psi_1(x) - \psi_0(x) = \varepsilon \chi(x).$$

Тогда, так как $\psi_1(x)$ — решение уравнения (14), мы имеем тождество

$$\begin{aligned} \psi_0(x) + \varepsilon \chi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \{f[y, \psi_0(y) + \varepsilon \chi(y)] - \\ - f[y, \psi_0(y)] + f[y, \psi_0(y)]\} dy = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\psi_0(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi_0(y)] dy = 0;$$

поэтому, вычитая и деля на ε , получаем

$$\chi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \frac{f[y, \psi_0(x) + \varepsilon \chi(y)] - f[y, \psi_0(y)]}{\varepsilon \chi(y)} \chi(y) dy = 0.$$

Полагая, что $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, будем иметь

$$\chi_0(x) - \lambda_0 \int_0^1 K^*(x, y) \chi_0(y) dy = 0, \quad (16)$$

где $\chi_0(x)$ — предел функции $\chi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому функция $\chi_0(x)$ должна быть нетривиальным решением однородного линейного интегрального уравнения (16) с ядром $K^{*1)}$.

4.6. Нелинейные уравнения типа Гаммерштейна

В упоминавшейся в предыдущем параграфе работе А. Гаммерштейн изучал нелинейные интегральные уравнения вида ²⁾

$$\psi(x) + \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi(y)] dy = 0 \quad (1)$$

при следующих основных предположениях:

¹⁾ Заметим, что предыдущее условие должно выполняться и в том случае, когда близкое решение $\psi_1(x)$ существует как слева, так и справа от точки $\lambda = \lambda_0$. В соответствии с нашим определением (стр. 208) в этом случае λ_0 не является больше точкой бифуркации. Поэтому предыдущее условие является скорее условием «слияния» двух или большего числа решений уравнения, чем условием существования точки бифуркации.

²⁾ На самом деле Гаммерштейн рассматривает интегралы по n -мерным многообразиям [как в уравнении (10) § 3.17]; однако это не вносит существенных изменений в изложение.

(I) основная теорема Фредгольма справедлива для линейного интегрального уравнения с ядром K^1), и итерированное ядро $K_2(x, y)$ непрерывно;

(II) ядро K симметрично, т. е. $K(x, y) = K(y, x)$;

(III) ядро K положительно, т. е. все его собственные значения положительны.

Если эти условия выполнены, мы будем говорить, что интегральное уравнение принадлежит к *собственно* гаммерштейнову типу.

Идеи метода Гаммерштейна группируются вокруг теоремы Гильберта—Шмидта. Более точно, им используется тот факт, что так как в силу (I)

$$\psi(x) = \int_0^1 K(x, y) g(y) dy \quad \text{при} \quad g(y) = -f[y, \psi(y)],$$

если решение вообще существует, и так как функция $g(y)$ принадлежит классу L^2 , то $\psi(x)$ может быть представлена (равномерно) сходящимся рядом вида

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x), \quad (2)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ — (ортонормированные) собственные функции ядра $K(x, y)$ (отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ соответственно) и c_1, c_2, \dots — некоторые неиз-

¹⁾ Для этого достаточно, чтобы K принадлежало классу L_2 в смысле гл. II. Тем не менее мы будем здесь предполагать для простоты, что $K_2(x, y)$ непрерывно, откуда, в силу симметрии функции K , следует, что $K \in L_2^*$, ибо

$$A^2(x) \equiv B^2(x) \equiv \int_0^1 K^2(x, y) dy = K_2(x, x).$$

Поэтому ряд в теореме Гильберта—Шмидта будет сходиться не только *почти равномерно*, но даже и равномерно. Предположение, что K_2 непрерывно, содержится в работе Гаммерштейна неявно.

вестные постоянные. Так как

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 \psi(x) \varphi_m(x) dx = - \int_0^1 \varphi_m(x) dx \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi(y)] dy = \\ &= - \int_0^1 f[y, \psi(y)] dy \int_0^1 K(x, y) \varphi_m(x) dx = \\ &= - \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f[y, \psi(y)] \varphi_m(y) dy, \end{aligned}$$

отсюда следует, что задача решения данного уравнения эквивалентна задаче решения следующей бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных:

$$c_m = - \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f \left[y, \sum_{h=1}^{\infty} c_h \varphi_h(y) \right] \varphi_m(y) dy \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Теперь вполне естественно рассмотреть «приближенное» решение

$$\psi_n(x) = \sum_{m=1}^n c_{n,m} \varphi_m(x), \quad (4)$$

где n постоянных $c_{n,1}, c_{n,2}, \dots, c_{n,n}$ должны удовлетворять следующей системе n уравнений с n неизвестными:

$$c_{n,m} = - \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f \left[y, \sum_{h=1}^n c_{n,h} \varphi_h(y) \right] \varphi_m(y) dy \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Но допускает ли эта система вообще какое-нибудь решение?

Рассматривая некоторую задачу на минимум для подходящей функции n переменных, Гаммерштейн очень изящно показал, что система (5) имеет по крайней мере одно решение, если только функция $f(x, u)$ непрерывна и по абсолютному значению меньше некоторой линейной функции переменной $|u|$, т. е. если она удовлетво-

ряет условию вида

$$|f(x, u)| \leq C_1 |u| + C_2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 — две положительные постоянные, причем C_1 меньше первого собственного значения λ_1 положительного ядра $K(x, y)$ ¹⁾.

Для доказательства этого утверждения Гаммерштейн рассмотрел непрерывную функцию

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n \lambda_m x_m^2 + 2 \int_0^1 F\left[y, \sum_{h=1}^n x_h \varphi_h(y)\right] dy,$$

где

$$F(y, u) = \int_0^u f(y, v) dv. \quad (7)$$

Частные производные функции $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тесно связаны с уравнениями системы (5), так как

$$\frac{1}{2\lambda_m} \frac{\partial H}{\partial x_m} = x_m + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f\left[y, \sum_{h=1}^n x_h \varphi_h(y)\right] \varphi_m(y) dy. \quad (8)$$

Легко видеть, что функция H ограничена снизу.

Действительно, из соотношений (6) и (7) следует, что

$$|F(x, u)| \leq \frac{1}{2} C_1 u^2 + C_2 |u|, \quad (9)$$

и если C_1 меньше некоторой постоянной k , то, учитывая элементарное неравенство²⁾

$$ax - bx^2 \leq \frac{a^2}{4b} \quad (b > 0), \quad (10)$$

в котором мы положим $x \equiv |u|$, $a \equiv C_2$ и $b \equiv (k - C_1)/2$, будем иметь

$$\frac{1}{2} C_1 u^2 + C_2 |u| \leq \frac{1}{2} k u^2 + C_3,$$

¹⁾ Несмотря на то, что неравенство (6) может быть несколько ослаблено (см. ниже), Гаммерштейн показал, что оценку $C_1 < \lambda_1$ (вообще говоря) нельзя улучшить.

²⁾ Умноженное на положительное число $4b$ неравенство (10) эквивалентно утверждению, что

$$a^2 - 4abx + 4b^2 x^2 = (a - 2bx)^2 \geq 0.$$

где

$$C_3 = \frac{C_2^2}{2(k - C_1)}.$$

Поэтому, если

$$C_1 < k < \lambda_1,$$

мы имеем

$$F(x, u) \geq -\left(\frac{1}{2}ku^2 + C_3\right). \quad (11)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq & \sum_{m=1}^n \lambda_m x_m^2 - \\ & - \int_0^1 \left[k \left(\sum_{h=1}^n x_h \varphi_h(y) \right)^2 + 2C_3 \right] dy, \end{aligned}$$

т. е.

$$H \geq \sum_{m=1}^n \lambda_m x_m^2 - k \sum_{h=1}^n x_h^2 - 2C_3 = \sum_{m=1}^n (\lambda_m - k) x_m^2 - 2C_3. \quad (12)$$

Так как $k < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, сумма в правой части неотрицательна. Отсюда следует, что H имеет нижнюю грань $-2C_3$.

Поэтому существует по крайней мере одна совокупность $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ значений x_1, x_2, \dots, x_n , для которой непрерывная функция H достигает *абсолютного минимума* d_n . Полагая

$$c_{n,m} = x_m^{(0)} \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

мы получаем решение системы (5), так как для

$$x_m = x_m^{(0)} = c_{n,m} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

имеют место равенства

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0.$$

Далее важно показать, что для этих значений величин $c_{n,m}$ сумма

$$S_n = \sum_{m=1}^n \lambda_m c_{n,m}^2 \quad (14)$$

имеет верхнюю грань, не зависящую от n .

Действительно, если x_m принимают значения (13), то, согласно (12),

$$\sum_{m=1}^n (\lambda_m - k) c_{n,m}^2 \leq d_n + 2C_3$$

и тем более

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k}{\lambda_1}\right) \sum_{m=1}^n \lambda_m c_{n,m}^2 = \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\lambda_m - k \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right) c_{n,m}^2 \leq \sum_{m=1}^n (\lambda_m - k) c_{n,m}^2 \leq d_n + 2C_3, \end{aligned}$$

т. е.

$$S_n \leq \frac{d_n + 2C_3}{1 - k/\lambda_1}.$$

Но, с другой стороны, так как

$$H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = H_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0),$$

мы имеем

$$d_{n+1} \leq d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Поэтому $d_n \leq d_1$, и мы получаем

$$S_n \leq D = \frac{d_1 + 2C_3}{1 - k/\lambda_1}. \quad (15)$$

Это показывает, что можно также написать

$$\int_0^1 \psi_n^2(x) dx = \sum_{m=1}^n c_{n,m}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^n \lambda_m c_{n,m}^2 \leq \frac{D}{\lambda_1}. \quad (16)$$

Теперь нам нужно показать, что при $n \rightarrow \infty$ функции $\psi_n(x)$ стремятся к решению данного уравнения.

Прежде всего мы покажем, что функции

$$\chi_n(x) = \psi_n(x) + \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi_n(y)] dy \quad (17)$$

равномерно стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. В самом деле, снова используя теорему Гильберта — Шмидта, находим

$$\begin{aligned}\chi_n(x) &= \sum_{m=1}^n c_{n,m} \varphi_m(x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \int_0^1 \varphi_m(\xi) d\xi \int_0^1 K(\xi, y) f[y, \psi_n(y)] dy = \\ &= \sum_{m=1}^n c_{n,m} \varphi_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} \int_0^1 f[y, \psi_n(y)] \varphi_m(y) dy.\end{aligned}$$

В силу (5) имеем

$$\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f[y, \psi_n(y)] \varphi_m(y) dy = -c_{n,m}.$$

Поэтому первые n членов второй суммы и первая сумма взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\chi_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m^{-1} \varphi_m(x) \int_0^1 f[y, \psi_n(y)] \varphi_m(y) dy.$$

Следовательно, используя неравенство Буняковского — Шварца для сумм, мы можем заключить, что

$$\chi_n^2(x) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m^{-2} \varphi_m^2(x) \sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\int_0^1 f[y, \psi_n(y)] \varphi_m(y) dy \right]^2. \quad (18)$$

Согласно неравенству Буняковского — Шварца для интегралов, имеем

$$\begin{aligned}\left\{ \int_0^1 f[y, \psi_n(y)] \varphi_m(y) dy \right\}^2 &\leq \int_0^1 \varphi_m^2(y) dy \int_0^1 f^2[y, \psi_n(y)] dy = \\ &= \int_0^1 f^2[y, \psi_n(y)] dy.\end{aligned}$$

Возведение обеих частей неравенства (6) в квадрат дает

$$\begin{aligned} f^2(x, u) &\leq C_1^2 u^2 + 2C_1 C_2 |u| + C_2^2 = \\ &= 2C_1 C_2 |u| - (k - C_1^2) u^2 + k u^2 + C_2^2. \end{aligned}$$

Поэтому, допуская, что $C_1^2 < k$, и применяя неравенство (10), в котором положено $x = |u|$, $a = 2C_1 C_2$, $b = k - C_1^2$, получаем

$$f^2(y, u) \leq k u^2 + C_4,$$

где C_4 — соответствующая постоянная. Отсюда, учитывая соотношение (16), приходим к неравенствам

$$\int_0^1 f^2[y, \psi_n(y)] dy \leq \int_0^1 [k \psi_n^2(y) + C_4] dy \leq \frac{k}{\lambda_1} D + C_4 = D^*, \quad (19)$$

и неравенство (18) принимает вид

$$\chi_n^2(x) \leq D^* \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m^{-2} \varphi_m^2(x).$$

Хорошо известно, что бесконечный ряд $\sum \lambda_m^{-2} \varphi_m^2(x)$ равномерно сходится к $K_2(x, x)$. Поэтому $\chi_n(x)$ равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы показали, что если последовательность $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ сходится к пределу $\psi(x)$ и если для нахождения предела интеграла

$$\int_0^1 K(x, y) f[y, \psi_n(y)] dy$$

при $n \rightarrow \infty$ можно применить основную теорему Лебега, то предельная функция $\psi(x)$ является решением данного уравнения (1). Но сходится ли вообще последовательность ψ_1, ψ_2, \dots ? В предыдущих предположениях мы не можем это утверждать, но нетрудно показать, что из последовательности $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ всегда можно выбрать подпоследовательность

$$\psi_{n_1}(x), \psi_{n_2}(x), \psi_{n_3}(x), \dots,$$

сходящуюся равномерно к (непрерывной) предельной функции $\psi(x)$.

Для этого достаточно применить к последовательности

$$\omega_n(x) = \chi_n(x) - \psi_n(x) = \int_0^1 K(x, y) f[y, \psi_n(y)] dy$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

хорошо известную теорему¹⁾, в силу которой указанное свойство следует из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности рассматриваемых функций.

Последовательность $\{\omega_n\}$ равномерно ограничена, ибо как следствие из неравенства (19) мы имеем

$$\omega_n^2(x) \leq \int_0^1 K^2(x, y) dy \int_0^1 f^2[y, \psi_n(y)] dy \leq D^* \int_0^1 K^2(x, y) dy.$$

Функции $\omega_n(x)$ равностепенно непрерывны в силу неравенств

$$\begin{aligned} & [\omega_n(x_1) - \omega_n(x_2)]^2 = \\ & = \left\{ \int_0^1 [K(x_1, y) - K(x_2, y)] f[y, \psi_n(y)] dy \right\}^2 \leq \\ & \leq \int_0^1 [K(x_1, y) - K(x_2, y)]^2 dy \int_0^1 f^2[y, \psi_n(y)] dy \leq \\ & \leq D^* \int_0^1 [K^2(x_1, y) - 2K(x_1, y)K(x_2, y) + K^2(x_2, y)] dy = \\ & = D^* [K_2(x_1, x_1) - 2K_2(x_1, x_2) + K_2(x_2, x_2)] = \\ & = D^* [K_2(x_1, x_1) - K_2(x_1, x_2)] + D^* [K_2(x_2, x_2) - \\ & \quad - K_2(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

и того факта, что, как мы предположили, итерированное ядро $K_2(x, y)$ непрерывно.

Так как $\lim \chi_n(x) = 0$, то переход от последовательности $\{\omega_n\}$ к последовательности $\{\psi_n\}$ очевиден.

¹⁾ См., например, Курант и Гильберт [27], стр. 56 или цитированную в § 2.1 книгу Гофмана, стр. 106, теорема 5.

Итак, нами доказана следующая

Теорема существования. *Если ядро K удовлетворяет основным условиям (I), (II), (III) и непрерывная функция $f(y, u)$ удовлетворяет условию (6), то нелинейное интегральное уравнение (1) имеет по крайней мере одно (непрерывное) решение.*

Условие (6) можно ослабить многими способами. Например, совершенно очевидно, что если на функцию $F(y, u)$ наложить условие (11), то непрерывная функция $f(y, u)$ должна только удовлетворять неравенству

$$|f(y, u)| < C_1 |u| + C_2, \quad (6')$$

где C_1 и C_2 — любые произвольные постоянные, причем C_1 не обязательно меньше, чем λ_1 .

Далее, если ядро K непрерывно и, следовательно, ограничено, мы можем полностью отказаться от условия (6) и сохранить лишь условие (11), ибо тогда неравенство вида (19) можно вывести независимо от (6) из того факта, что функция $f(y, u)$ непрерывна и функция $\psi_n(y)$ ограничена. В самом деле, мы можем написать

$$\psi_n(x) = \sum_{m=1}^n c_{n,m} \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} c_{n,m} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{\lambda_m}},$$

откуда, в силу теоремы Мерсера,

$$\begin{aligned} \psi_n^2(x) &\leq S_n \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m} \leq S_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m} = \\ &= S_n K(x, x) \leq D \max K(x, x). \end{aligned} \quad (20)$$

Другой важный факт состоит в том, что если значения ядра $K(x, y)$ и функции $f(y, u)$ неотрицательны для всех значений аргументов:

$$K(x, y) \geq 0, \quad f(y, u) \geq 0, \quad (21)$$

то справедливость теоремы существования может быть гарантирована наложением соответствующих ограничений на поведение непрерывной функции $f(y, u)$ только для $u \leq 0$. Например, достаточно предположить, что

$$0 \leq f(y, u) \leq C_1 |u| + C_2 \quad (u \leq 0, \quad 0 < C_1 < \lambda_1). \quad (22)$$

В самом деле, если положить

$$f^*(y, u) = \begin{cases} f(y, u) & (u \leq 0), \\ f(y, 0) & (u \geq 0), \end{cases}$$

то непрерывная функция $f^*(y, u)$ будет удовлетворять условию (6) и, следовательно, уравнение

$$\psi^*(x) = - \int_0^1 K(x, y) f^*[y, \psi^*(y)] dy \quad (23)$$

будет иметь по крайней мере одно решение Ψ^* , которое можно найти указанным выше способом. Но из предположений $K \geq 0$, $f^* \geq 0$ вытекает, что $\psi^* \leq 0$; отсюда

$$f^*[y, \psi^*(y)] = f[y, \psi^*(y)].$$

Последнее равенство показывает, что уравнение (23) отличается от уравнения (1) лишь по внешнему виду; следовательно, это уравнение имеет по крайней мере одно решение Ψ^* .

Предыдущий результат может быть обобщен, если воспользоваться следующими замечаниями. Во-первых, при подстановке вида $\psi(x) = -\psi_1(x)$ уравнение (1) переходит в уравнение

$$\psi_1(x) + \int_0^1 K(x, y) f_1[y, \psi_1(y)] dy = 0, \quad (24)$$

где

$$f_1(y, u) = -f(y, -u). \quad (25)$$

Во-вторых, полагая

$$f(y, u) = f_1(y, u) - C_3,$$

где C_3 — некоторая постоянная (но мы будем предполагать, что $C_3 > 0$), можно привести данное уравнение к виду

$$\psi(x) - k(x) + \int_0^1 K(x, y) f_1[y, \psi(y)] dy = 0,$$

где

$$k(x) = C_3 \int_0^1 K(x, y) dy.$$

Поэтому, если сделать подстановку

$$\psi^*(x) = \psi(x) - k(x)$$

и положить

$$f^*(y, u) = f_1[y, u + k(y)] = f[y, u + k(y)] + C_3,$$

то данное уравнение не изменится в том смысле, что оно примет вид

$$\psi^*(x) + \int_0^1 K(x, y) f^*[y, \psi^*(y)] dy = 0.$$

Заметим, что условию

$$0 \leq f^*(y, u) \leq C_1 |u| + C_2 \quad (u \leq 0)$$

будет отвечать условие

$$-C_3 \leq f[y, u + k(y)] \leq C_1 |u| + C_2 - C_3 \quad (u \leq 0).$$

Заметим далее, что полагая

$$u + k(y) = v$$

и учитывая, что $k(y) > 0$, будем иметь

$$v > u, \quad |v| < |u| \quad (v \leq 0).$$

Итак, мы видим, что теорема существования верна также тогда, когда

$$\begin{cases} -C_3 \leq f(y, v) \leq C_1 |v| + C_4 & (v \leq 0), \\ f(y, v) \geq -C_3 & (v \geq 0) \end{cases} \quad (26)$$

(где $C_1 < \lambda_1$ и C_4 — произвольная постоянная) или, согласно (25), когда

$$f(y, v) \leq C_3 \quad (v \leq 0), \quad -(C_1 v + C_2) \leq f(y, v) \leq C_3 \quad (v \geq 0). \quad (27)$$

Все сказанное позволяет нам составить следующую таблицу основных случаев, в которых можно а priori га-

рантировать существование по крайней мере одного (непрерывного) решения нелинейного уравнения (1):

Случаи	Предположения 1) относительно $K(x, y)$	Предположения 2) относительно $f(y, u)$		Примеры функции $f(y, u)$
		если $u \leq 0$	если $u \geq 0$	
а	—	f ограничена или удовлетворяет условию (6)		$\sin u$
б	непрерывность	F ограничена снизу или удовлетворяет условию (11)		e^u
в	$K \geq 0$	$0 \leq f \leq C_1 u + C_2$	$f \geq 0$	$1 + e^u \sin^2 y$
г		$f \leq 0$	$-(C_1u + C_2) \leq f \leq 0$	$-\left(1 + \frac{\sin^2 y}{e^u}\right)$
д		$-C_3 \leq f \leq C_1 u + C_2$	$f \geq -C_3$	$p(y)e^u + q(y)$ ($p \geq 0$; p, q непрерывны)
е		$f \leq C_3$	$-(C_1u + C_2) \leq f \leq C_3$	$-\frac{p(y)}{e^u} + q(y)$ ($p \geq 0$; p, q непрерывны)

1) В дополнение к основным предположениям (I), (II) и (III)

2) В дополнение к непрерывности. Кроме того, предполагается, что $0 < C_1 < \lambda_1$.

В работе Гаммерштейна имеется также несколько интересных замечаний относительно единственности или неединственности решений уравнения (1). Они начинаются с указания на то, что существование двух различных решений $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ уравнения (1) влечет за собой существование нетривиального решения уравнения

$$\Psi(x) + \int_0^1 K(x, y) g[y, \Psi(y)] dy = 0, \quad (28)$$

где

$$\Psi(x) = \psi^*(x) - \psi(x), \quad g(y, u) = f[y, u + \psi(y)] - f[y, \psi(y)], \quad (29)$$

и обратно.

Простое, но интересное достаточное условие единственности дает следующее замечание: *если*

$$g(y, u) \geq 0 \quad (u > 0), \quad g(y, u) \leq 0 \quad (u < 0), \quad (30)$$

то уравнение (28) имеет только одно решение $\Psi(x) \equiv 0$.

Действительно, из уравнения (28) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Psi(x) g[x, \Psi(x)] dx = \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) g[x, \Psi(x)] g[y, \Psi(y)] dx dy. \end{aligned}$$

Согласно предположению (30), имеем

$$\int_0^1 \Psi(x) g[x, \Psi(x)] dx \geq 0,$$

а в силу положительности ядра K получаем неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y) g[x, \Psi(x)] g[y, \Psi(y)] dx dy < 0,$$

если только не имеет места тождество

$$g[x, \Psi(x)] \equiv 0. \quad (31)$$

Поэтому условие (31) должно обязательно выполняться, и тогда из уравнения (28) следует, что $\Psi(x) \equiv 0$.

Так как функция $g(y, u)$, определяемая вторым из равенств (29), очевидно, удовлетворяет условию (30), если $f(y, u)$ — неубывающая монотонная функция u , мы получаем следующую теорему.

Теорема единственности I. *Если для любого фиксированного y из интервала $(0, 1)$ функция $f(y, u)$ является неубывающей функцией u , то нелинейное интегральное уравнение (1) имеет самое большее одно решение.*

Равным образом важна следующая

Теорема единственности II. Нелинейное интегральное уравнение (1) имеет самое большее одно решение, если функция $g(y, u)$ удовлетворяет неравенству вида

$$|g(y, u)| \leq \alpha |u| \quad (0 < \alpha < \lambda_1). \quad (32)$$

Для доказательства заметим, что, в силу теоремы Гильберта — Шмидта, можно записать

$$\Psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \varphi_m(x),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \int_0^1 \Psi(x) \varphi_m(x) dx = \\ &= - \int_0^1 \varphi_m(x) dx \int_0^1 K(x, y) g[y, \Psi(y)] dy = \\ &= - \frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 g[y, \Psi(y)] \varphi_m(y) dy. \end{aligned}$$

Поэтому произведение $-\lambda_m \gamma_m$ является m -м коэффициентом Фурье функции $g[y, \Psi(y)]$ и, в силу неравенства Бесселя и условия (32),

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \gamma_m^2 \leq \int_0^1 g^2[y, \Psi(y)] dy \leq \alpha^2 \int_0^1 \Psi^2(y) dy = \alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2,$$

т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^2 - \lambda_m^2) \gamma_m^2 \geq 0.$$

Но так как имеют место неравенства

$$\alpha^2 - \lambda_m^2 \leq \alpha^2 - \lambda_1^2 < 0,$$

предыдущее неравенство противоречиво, кроме случая, когда

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0,$$

откуда $\Psi(x) \equiv 0$.

Из предшествующей теоремы немедленно вытекает следующая

Теорема единственности III. *Нелинейное интегральное уравнение (1) имеет самое большое одно решение, если функция $f(u, u)$ равномерно удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(u, u_1) - f(u, u_2)| < \alpha |u_1 - u_2|, \quad (33)$$

где положительная постоянная α меньше первого собственного значения λ_1 ядра K .

В самом деле, при этих предположениях функция $g(u, u)$, определяемая формулой (29), очевидно, удовлетворяет условию (32).

Отметим наконец, что среди других, Голомб¹⁾, Назаров²⁾ и Тржицзинский³⁾ изучали более общие нелинейные интегральные уравнения, чем уравнения типа Гаммерштейна, особенно уравнения вида (1) с *сингулярным* ядром.

4.7. Вынужденные колебания конечной амплитуды

Покажем, насколько важны результаты предыдущего параграфа, применив их к решению следующей знаменитой и трудной задачи: изучить вынужденные колебания *конечной амплитуды*, совершаемые маятником и описываемые при отсутствии диссипативных сил нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \alpha^2 \sin \varphi(t) = F(t). \quad (1)$$

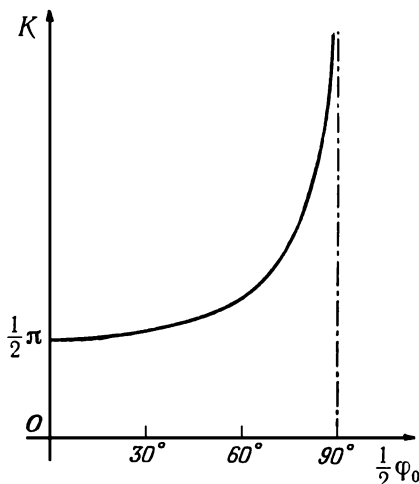
Главная трудность связана с тем, что для данного α^2 и данной периодической возмущающей силы $F(t)$ мы можем иметь дело как с «резонансным», так и «нерезонансным» случаем в зависимости от амплитуды колебаний.

¹⁾ Golomb M., Zur Theory der nichtlinearen Integralgleichungen, *Math. Z.*, 39 (1935), 45 — 75.

²⁾ Назаров Н., Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна, *Тр. Среднеаз. ун-та*, сер. 5, 28 (1939), 12; 33 (1941), 3 — 78; нов. сер., 6 (1945), 14; *Math. Rev.*, 3 (1942), 150; 8 (1947), 518.

³⁾ Trjitzinsky W. J., Singular non-linear integral equations, *Duke Math. J.*, 11 (1944), 517 — 564.

В самом деле, в то время как период «бесконечно малых» свободных колебаний маятника постоянен и равен



Р и с. 14.

$2\pi/\alpha$ ($\alpha^2 = g/l$), ибо такие колебания описываются линейным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha^2\varphi = 0, \quad (2)$$

период свободных колебаний с конечной амплитудой φ_0 определяется выражением

$$\frac{4}{\alpha} K(k), \quad k = \sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right),$$

где $K(k)$ обозначает полный эллиптический интеграл Лежандра:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

который (рис. 14) монотонно возрастает от $\pi/2$ до ∞ , когда $k = \sin(\varphi_0/2)$ возрастает от 0 до 1.

После опубликования работы ДUFFинга¹⁾ эта задача изучалась Гамелем²⁾ и позднее Иглишем³⁾. Ими применялись в основном методы Гаммерштейна и Шмидта.

Если возмущающая сила $F(t)$ является *нечетной* функцией с некоторым периодом 2ω , как это имеет место в важном случае

$$F(t) = \beta \sin \frac{\pi t}{\omega},$$

то относительно уравнения (1) ставится следующий основной вопрос: допускает или нет наше уравнение решение такого же вида, т.е. нечетное и периодическое с периодом 2ω ?

Чтобы решить эту трудную задачу, заметим прежде всего, что если $F(t)$ удовлетворяет указанному условию, то из любого решения $\varphi^*(t)$ уравнения (1), определенного только для $0 \leq t \leq \omega$ и удовлетворяющего условиям

$$\varphi^*(0) = \varphi^*(\omega) = 0, \quad (3)$$

мы можем непосредственно получить нечетное периодическое решение уравнения (1) (с периодом ω), полагая

$$\varphi(\tau + n\omega) = \varphi^*(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

и

$$\varphi(-t) = -\varphi(t).$$

Обратно, любое нечетное периодическое решение уравнения (1), очевидно, должно удовлетворять условиям (3).

Таким образом, мы видим, что наша задача равносильна задаче решения нелинейного дифференциального уравнения (1) при классических краевых условиях

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (4)$$

где для простоты мы положили $\omega = 1$.

¹⁾ Duffing G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Sammlung Vieweg, Heft 41/42, Braunschweig, 1918.

²⁾ Hamel G., *Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden*, *Math. Ann.*, 86 (1922), 2.

³⁾ См., например, Tricomi F., *Elliptische Funktionen*, Leipzig 1948, p. 272—274 (2-ое итальянское изд. Bologna, (1951); Iglisch R., *Monatsh. Math. Physik* (Wien), 37 (1930), 325—342; 39 (1932), 173—220; 42 (1935), 7—36; *Math. Ann.*, 111 (1935), 568—581; 112 (1936), 221—246.

Вспомним сейчас, что функцией Грина для системы Штурма — Лиувилля

$$y''(x) + \lambda r(x) y(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

является *треугольное ядро*

$$T(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & (0 \leq x \leq y), \\ y(1-x) & (y \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Вспомним также, что решение неоднородного дифференциального уравнения можно выразить при помощи формулы (3.13.30). Следовательно, система (1) + (4) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\varphi(x) = - \int_0^1 T(x, y) [F(y) - \alpha^2 \sin \varphi(y)] dy,$$

которое после подстановки

$$\int_0^1 T(x, y) F(y) dy = g(x), \quad \varphi(x) + g(x) = \psi(x) \quad (5)$$

принимает форму уравнения Гаммерштейна

$$\psi(x) + \int_0^1 T(x, y) f[y, \psi(y)] dy = 0, \quad (6)$$

причем

$$f(y, u) = \alpha^2 \sin [u - g(y)]. \quad (7)$$

Функция $f(y, u)$ на этот раз *ограничена*. Поэтому результаты предыдущего параграфа [случай (а) в таблице] позволяют нам непосредственно заключить, что *наша задача имеет по крайней мере одно решение*. Этот результат тривиален, если α^2 мало (по сравнению с единицей), но это заведомо нетривиально для больших α^2 ¹⁾

¹⁾ Может показаться странным, что даже в том случае, когда отношение $2\pi/\alpha$ велико по сравнению с ω , все же мы можем иметь случай «резонанса». Однако всегда существует целое кратное ω , близкое к $2\pi/\alpha$ или превосходящее его.

Более того, теорема единственности II предыдущего параграфа говорит нам, что если

$$\alpha < \pi, \quad (8)$$

то наша задача имеет в точности одно решение, ибо в этом случае

$$\max \left| \frac{\partial}{\partial u} f(y, u) \right| = \max |\alpha^2 \cos[u - g(y)]| = \alpha^2, \quad \lambda_1 = \pi^2,$$

и условие (4.6.32) выполняется, если только имеет место неравенство (8).

Конечно, исследование вопроса этим не исчерпывается, так как мы могли бы спросить, имеется ли при $\alpha > \pi$ несколько решений, если имеется, то сколько и т. д.; но здесь мы отсылаем читателя к цитированным работам Иглиша, так как это отнюдь не простые вопросы.

Почти единственный простой результат из этой области заключается в том, что, в силу соображений, приведенных в конце § 4.5, необходимым (но, вообще говоря, недостаточным) условием того, чтобы точка $\alpha^2 = \lambda = \lambda_0$ была точкой бифуркации для решения $\psi_0(x)$ уравнения

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 T(x, y) \sin[\psi(y) - g(y)] dy = 0, \quad (9)$$

является существование нетривиального решения у однородного уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_0^1 T(x, y) \cos[\psi_0(y) - g(y)] \varphi(y) dy = 0. \quad (10)$$

Другими словами, λ_0 должно быть собственным значением ядра

$$K(x, y) = T(x, y) \cos[\psi_0(y) - g(y)].$$

Итак, мы видим, что единственными возможными точками бифуркации для решения нашей задачи о равновесном положении маятника, т. е. для решения $\psi_0(x) \equiv g(x)$, являются точки

$$\alpha = \pi, \quad \alpha = 2\pi, \quad \alpha = 3\pi, \dots,$$

ибо собственными значениями треугольного ядра, как мы знаем из § 3.10, являются числа π^2 , $4\pi^2$, $9\pi^2$, Более того, как показал Иглиш, эти точки на самом деле являются точками бифуркации; это ни в коей мере не удивительно, ибо (поскольку раньше мы положили $\omega = 1$) они соответствуют хорошо известным случаям резонанса в элементарной теории маятника.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Системы линейных алгебраических уравнений

Теорию интегральных уравнений можно рассматривать как обобщение теории систем линейных алгебраических уравнений, поэтому читатель должен быть хорошо знаком с последней.

В настоящее время это сделать нетрудно, ибо такая теория может быть легко выведена из правила Крамера и простой теоремы о матрицах ранга p ¹⁾. Но прежде всего мы напомним формулу Коши, при помощи которой *окаймленный* определитель $(n+1)$ -го порядка

$$A' = \begin{vmatrix} a & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & a \end{vmatrix} \quad (1)$$

выражается через определитель n -го порядка $A = |a_{rs}|$ и алгебраические дополнения A_{rs} его элементов. Более точно, имеет место формула

$$A' = aA - \sum_{h,k=1}^n A_{hk} \alpha_h \beta_k. \quad (2)$$

В самом деле, если разложить определитель A' по элементам его первой строки, а затем соответствующие алгебраические дополнения по элементам их первых столб-

¹⁾ Определение ранга см. в § 2.3.

цов, то получим

$$\begin{aligned} A' &= aA + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \beta_k \sum_{h=1}^n (-1)^h \alpha_h [(-1)^{h+k} A_{hk}] = \\ &= aA - \sum_{h,k=1}^n A_{hk} \alpha_h \beta_k. \end{aligned}$$

С помощью этой формулы нетрудно вывести упомянутую выше теорему о матрицах ранга p :

Если матрица с m строками и n столбцами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

имеет ранг $p < m$ и если в ее первых p строках содержится не равный нулю минор p -го порядка, то остальные $m - p$ строк являются «линейными комбинациями» первых p строк в том смысле, что можно найти такие постоянные $\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)}, \dots, \mu_p^{(r)}$, что для каждого r , $p+1 \leq r \leq m$, и каждого s , $1 \leq s \leq n$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} a_{rs} &= \mu_1^{(r)} a_{1s} + \mu_2^{(r)} a_{2s} + \dots + \mu_p^{(r)} a_{ps} \\ (p+1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n). \end{aligned} \quad (4)$$

Однако такое соотношение невозможно между элементами первых p строк, даже если $p = m$.

Для доказательства предположим, что

$$A^{(p)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

— отличный от нуля минор p -го порядка¹⁾. Множители $\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)}, \dots, \mu_p^{(r)}$ находим из первых p уравнений вида (4),

¹⁾ Мы всегда можем добиться выполнения этого условия, переставив соответствующим образом столбцы матрицы.

отвечающих индексам s , равным $1, 2, \dots, p$. Так как определитель этой системы, совпадающий с $A^{(p)}$, отличен от нуля, то по правилу Крамера получаем

$$\begin{aligned} \mu_h^{(r)} &= \frac{1}{A^{(p)}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{h-1,1} & a_{r1} & a_{h+1,1} & \dots & a_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & \dots & a_{h-1,p} & a_{rp} & a_{h+1,p} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{A^{(p)}} \sum_{k=1}^p a_{rk} A_{hk}^{(p)} \quad (h = 1, 2, \dots, p), \end{aligned} \quad (5)$$

где через $A_{hk}^{(p)}$ обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{hk} относительно определителя $A^{(p)}$.

Далее покажем, что найденные значения $\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)}, \dots, \mu_p^{(r)}$ удовлетворяют не только первым p уравнениям (4), но также и остальным $n-p$, т. е. уравнениям, отвечающим значениям $s = p+1, p+2, \dots, n$. В самом деле, для этих значений s имеем

$$\begin{aligned} A^{(p)} (a_{rs} - \mu_1^{(r)} a_{1s} - \mu_2^{(r)} a_{2s} - \dots - \mu_p^{(r)} a_{ps}) = \\ = A^{(p)} a_{rs} - \sum_{h,k=1}^p a_{hs} a_{rk} A_{hk}^{(p)}, \end{aligned}$$

а это, в силу (2), есть разложение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & a_{rs} \end{vmatrix},$$

который равен нулю, ибо все миноры $(p+1)$ -го порядка матрицы (3) равны нулю. Кроме того, между первыми p строками не может существовать никакого соотношения вида (4), ибо если

$$\mu_1 a_{1s} + \mu_2 a_{2s} + \dots + \mu_p a_{ps} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

Таким образом, доказано, что:

а) если $n = t = p$, то система (6) имеет всегда одно и только одно решение;

б) если $n = p$, $t > p$, то система (6) имеет одно и только одно решение, коль скоро удовлетворены $t - p$ уравнений (7);

в) если $n > p$, $t = p$, то система (6) обладает бесконечным числом решений, точнее ∞^{n-p} решениями, ибо значения $n - p$ неизвестных могут быть выбраны произвольно;

г) если $n > p$, $t > p$, то система (6) допускает ∞^{n-p} решений, если только удовлетворяются уравнения (7).

Итак, мы видим, что система (6) всегда совместна (т. е. имеет по крайней мере одно решение) при $t = p$, в то время как при $t > p$ она совместна тогда и только тогда, когда величины b_r удовлетворяют условиям (7).

В частности, при $t = n$ система (6) имеет одно и только одно решение, если $p = n$, т. е. если ее определитель отличен от нуля, в то время как при $p < n$ она либо имеет ∞^{n-p} решений, либо не имеет ни одного решения, в зависимости от того, выполняются $t - p$ условий (7) или нет.

Если система (6) однородна, т. е. если

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0,$$

то всегда существует тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда $p \leq n - 1$. Эти решения можно представить «параметрически» формулами вида (2.3.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Теорема Адамара

В § 2.5 для установления сходимости рядов Фредгольма $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$ в предположении, что $|K(x, y)| < N$, нам потребовалась следующая теорема Адамара:

Если D — определитель n -го порядка с элементами

$$a_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots, n),$$

то

$$D^2 \leq \sum_{s=1}^n a_{1s}^2 \sum_{s=1}^n a_{2s}^2 \dots \sum_{s=1}^n a_{ns}^2, \quad (1)$$

и поэтому

$$|D| \leq n^{n/2} N^n, \quad (2)$$

если только

$$|a_{rs}| \leq N. \quad (3)$$

Из многих доказательств этой теоремы мы приведем одно, в котором используется процесс ортогонализации из § 3.1¹⁾.

Этот процесс применяется на этот раз не к системе функций, а к системе n линейно независимых векторов²⁾ n -мерного пространства

$$a_r = a_{r1}i_1 + a_{r2}i_2 + \dots + a_{rn}i_n \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

¹⁾ Tricomi F., Sul teorema di Hadamard sui determinanti, *Rev. Universidad Nac. Tucuman S. A.*, 1 (1940), 297—301.

²⁾ Если n векторов линейно зависимы, т. е. существуют n постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (не равных одновременно нулю), таких, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$, то определитель D равен нулю и теорема очевидна. Через i_1, i_2, \dots, i_n мы обозначаем n базисных единичных векторов нашего пространства.

Путем соответствующего линейного преобразования вида

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= \mu_{21}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b}_3 &= \mu_{31}\mathbf{b}_1 + \mu_{32}\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_n &= \mu_{n1}\mathbf{b}_1 + \mu_{n2}\mathbf{b}_2 + \dots + \mu_{n,n-1}\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{a}_n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

систему (4) можно привести к системе *ортогональных* векторов

$$\mathbf{b}_r = b_{r1}\mathbf{i}_1 + b_{r2}\mathbf{i}_2 + \dots + b_{rn}\mathbf{i}_n \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

т. е. таких векторов, что

$$\mathbf{b}_r \mathbf{b}_s = b_{r1}b_{s1} + b_{r2}b_{s2} + \dots + b_{rn}b_{sn} = 0 \quad (r \neq s). \quad (7)$$

Так же как и в процессе ортогонализации последовательности функций, положим

$$\mu_{rs} = -\frac{\mathbf{a}_r \mathbf{b}_s}{\mathbf{b}_s^2} \quad (r = 1, 2, \dots, n; \quad s = 1, 2, \dots, r-1), \quad (8)$$

где знаменатель не может обратиться в нуль, ибо в противном случае линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ была бы равной нулю, что противоречит предположению о линейной независимости векторов (4).

Более того, имеем

$$\mathbf{b}_r^2 \leq \mathbf{a}_r^2 \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

так как

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_r^2 &= [\mathbf{a}_r + (\mu_{r1}\mathbf{b}_1 + \mu_{r2}\mathbf{b}_2 + \dots + \mu_{r,r-1}\mathbf{b}_{r-1})]^2 = \\ &= \mathbf{a}_r^2 + \mu_{r1}^2\mathbf{b}_1^2 + \mu_{r2}^2\mathbf{b}_2^2 + \dots + \mu_{r,r-1}^2\mathbf{b}_{r-1}^2 + \\ &\quad + 2\mathbf{a}_r(\mu_{r1}\mathbf{b}_1 + \mu_{r2}\mathbf{b}_2 + \dots + \mu_{r,r-1}\mathbf{b}_{r-1}) = \\ &= \mathbf{a}_r^2 + \mu_{r1}^2\mathbf{b}_1^2 + \mu_{r2}^2\mathbf{b}_2^2 + \dots + \mu_{r,r-1}^2\mathbf{b}_{r-1}^2 - \\ &\quad - 2(\mu_{r1}^2\mathbf{b}_1^2 + \mu_{r2}^2\mathbf{b}_2^2 + \dots + \mu_{r,r-1}^2\mathbf{b}_{r-1}^2) = \\ &= \mathbf{a}_r^2 - (\mu_{r1}^2\mathbf{b}_1^2 + \mu_{r2}^2\mathbf{b}_2^2 + \dots + \mu_{r,r-1}^2\mathbf{b}_{r-1}^2) \leq \mathbf{a}_r^2. \end{aligned}$$

Далее, наряду с определителем D с элементами a_{rs} рассматриваем определитель Δ с элементами b_{rs} и замечаем,

что из формул (5) следует

$$a_{rs} = b_{rs} - \mu_{r1}b_{1s} - \mu_{r2}b_{2s} - \dots - \mu_{r,r-1}b_{r-1,s} \quad (10)$$

$$(r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому, используя несколько раз теорему об определителе, у которого элементы некоторой строки (или столбца) являются суммами нескольких слагаемых, видим, что определитель D можно представить как сумму определителей, первым членом которой является определитель Δ , а все последующие члены равны нулю, ибо в каждом из них имеется по крайней мере два одинаковых столбца. Поэтому

$$D = \Delta.$$

Но, в силу условия (7) и хорошо известного правила умножения определителей, имеем

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \sum b_{1s}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum b_{2s}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum b_{ns}^2 \end{vmatrix},$$

откуда, учитывая (9), окончательно получаем

$$D^2 = \Delta^2 = \sum b_{1s}^2 \sum b_{2s}^2 \dots \sum b_{ns}^2 \leq \sum a_{1s}^2 \sum a_{2s}^2 \dots \sum a_{ns}^2,$$

т. е. неравенство (1).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Решите непосредственно (т. е. вычисляя итерированные ядра и т. д.) уравнения Вольтерра второго рода с ядрами $(x-y)^m$ ($m=1, 2, 3, \dots$).

2. Решите предыдущие уравнения, а также уравнение с ядром $a+b(x-y)$ (a, b — постоянные) путем сведения их к линейному дифференциальному уравнению.

3. Найдите резольвентное ядро интегрального уравнения Вольтерра с замкнутым циклом (§ 3.19) с помощью преобразования Лапласа.

4. Используя предыдущий результат (упражнение 3), покажите, что ядру Вольтерра

$$\frac{J_1[2\lambda(x-y)]}{(x-y)^{1/2}}$$

отвечает резольвентное ядро

$$-\frac{I_1[2\lambda(x-y)]}{(x-y)^{1/2}},$$

где J_1, I_1 — собственно бесселева и модифицированная бесселева функции первого рода и первого порядка.

5. Решите уравнение Вольтерра первого рода с ядром

$$1 + 4y + \frac{3}{2}y^2 - (4 + 3y)x + \frac{3}{2}x^2.$$

6. Покажите, что в приведенных ниже случаях функция $D(\lambda)$ для уравнений Фредгольма второго рода имеет указанное в таблице выражение:

Случай	$K(x, y)$	Основной интервал	$D(\lambda)$
а	± 1	$0, 1$	$1 \mp \lambda$
б	$g(x)$ или $g(y)$	a, b	$1 - \lambda \int_a^b g(t) dt$
в	xy	$0, 1$	$1 - \frac{1}{3} \lambda$
г	$\sin x \sin y$	$0, 2\pi$	$1 - \pi \lambda$
д	$2e^x e^y$	$0, 1$	$1 - (e^2 - 1) \lambda$
е	$x + y$	$0, 1$	$1 - \lambda - \frac{1}{12} \lambda^2$
ж	$x^2 + y^2$	$0, 1$	$1 - \frac{2}{3} \lambda - \frac{4}{45} \lambda^2$
з	$xy(x + y)$	$0, 1$	$1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{240} \lambda^2$

7. Проверьте, что в приведенных ниже случаях решениями указанных уравнений Фредгольма второго рода [основной интервал $(0, 1)$] являются следующие функции $\varphi(x)$:

$K(x, y)$	λ	$f(x)$	$\varphi(x)$
1	λ	x	$x + \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$
1	1	0	C (постоянная)
1	1	$\frac{1}{2} - x$	$\frac{1}{2} - x + C$
$x + y$	λ	x	$\frac{6(\lambda - 2)x - 4\lambda}{\lambda^2 + 12(\lambda - 1)}$
$x + y$	$-6 \pm 4\sqrt{3}$	0	$(1 \pm \sqrt{3}x)C$
$x + y$	$-6 \pm 4\sqrt{3}$	$1 \mp \sqrt{3}x$	$1 \pm \sqrt{3}x - \left(1 + \frac{3}{2}x\right) + (1 \pm \sqrt{3}x)C$

8. Решите уравнения для случаев (а), (в) и (д) упражнения 6, принимая за известную функцию $f(x)$ соответственно:

(а) $\sec^2 x$ или $\sec x \operatorname{tg} x$; (в), (д) x или e^x .

9. Используя метод § 2.3, найдите решения уравнений Фредгольма второго рода со следующими ядрами:

- (а) $1 + xy$, (б) $1 + \sin x \sin y$, (в) $(1 + x)(1 - y)$, (г) $x \pm y$,
(д) $1 + x + y$, (е) $(x \pm y)^2$, (ж) $x^2 + xy + y^2$.

10. Решите задачу Дирихле для круга (т. е. выведите интеграл Пуассона), используя результаты § 2.7.

11. Используя метод § 3.1, проортгонализируйте функции $1, x, x^2, x^3, \dots$ на основном интервале $(-1, 1)$.

12. Предполагая, что $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < 1$, проортгонализируйте n кусочно-постоянных функций

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq \xi_k) \\ 0 & (\xi_k < x \leq 1) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

13. Найдите значения сумм бесконечных рядов $\sum n^{-4}$ и $\sum n^{-6}$, применяя формулу Парсеваля относительно тригонометрической системы к функциям

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \text{ и } 2x^3 - 3x^2 + x$$

соответственно.

14. Выведите классическое разложение функций $\pi \operatorname{ctg}(\alpha\pi)$ и $[\pi/\sin(\alpha\pi)]^2$ по рациональным функциям, применяя формулу Парсеваля относительно тригонометрической системы к функциям $\cos(\alpha x)$ и $\sin(\alpha x)$.

15. Используя результаты упражнения 11, найдите собственные значения и собственные функции симметричного ядра $1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3$ на основном интервале $(-1, 1)$.

16. Определите суммы бесконечных рядов $\sum n^{-4}$, $\sum n^{-6}$, \dots , используя треугольное ядро $T(x, y)$.

17. Найдите собственные функции и собственные значения симметричного ядра $K(x, y) = \min(x, y)$ на основном интервале $(0, 1)$.

18. То же самое для ядра $K(x, y) = \exp\{\min(x, y)\}$; использовать линейное дифференциальное уравнение

$$\varphi'' - \varphi' + \lambda e^x \varphi = 0,$$

которое можно проинтегрировать в замкнутом виде с помощью бесселевых функций.

19. Исследуйте симметричное ядро

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin(n\pi x) \sin(n\pi y)$$

на основном интервале $(0, 1)$ и, в частности, найдите интегрированные ядра.

20. Используя формулу

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cos(\xi t) dt = \Gamma(\alpha) |\xi|^{-\alpha} \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\pi\right) \quad (0 < \alpha < 1),$$

покажите, что «уравнение Абеля с постоянными пределами»

$$\int_0^1 |x-y|^{-\alpha} \varphi(y) dy = f(x) \quad (0 < \alpha < 1)$$

имеет не более одного решения¹⁾

21. Исследуйте систему Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda r(x) y = 0 \quad (y(0) = y(1) = 0),$$

в частности случай $p(x) = r(x) = \exp 2kx$ ($k = \text{const}$).

22. Исследуйте сингулярную систему Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0 \quad (y(0) \text{ конечно, } y(1) = 0)$$

и покажите, в частности, что

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{J_0(j_h x) J_0(j_h y)}{[j_h J_1(j_h)]^2} = -\frac{1}{2} \ln \max(x, y),$$

где j_1, j_2, j_3, \dots — последовательные положительные нули функции $J_0(x)$.

23. Используйте результаты упражнения 22 и методы § 3.11 для приближенного определения первого нуля j_1 функции $J_0(z)$.

¹⁾ Tricomi F., *Rend. Ist. Lombardo* (2), 60 (1927), 598—609.

24. Изучите указанным в § 3.16 способом несимметричное ядро $K(x, y) = x + \sin y$ на основном интервале $(-\pi, \pi)$.

25. Методами § 3.18 приближенно определите первую собственную частоту мембраны эллиптической формы (Франк и Мизес [53], стр.340).

26. Используя формулу (4.1.10) при $\nu = \pm 1/2$, определите взаимно-обратные функции линейных преобразований

$$\mathcal{S}_x[\varphi(y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy,$$

$$\mathcal{C}_x[\varphi(y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xy) \varphi(y) dy.$$

27. Используйте метод § 4.3 для решения интегрального уравнения Фёпля

$$\int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y^2 - x^2} dy = f(x)$$

(Гамель [10]).

28. Покажите, что при $a(x) \equiv 1$ нетривиальными решениями однородного уравнения Карлемана являются функции

$$C(1-x)^{\mu-1}(1+x)^{\mu}, \text{ где } \mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\lambda\pi), \quad C = \text{const.}$$

29. Используйте результаты § 4.4 об однородных интегральных уравнениях типа Карлемана для доказательства того, что при любом выборе постоянных c_1, c_2, \dots, c_n (не равных одновременно нулю) функция

$$\frac{c_1 \cos \xi + c_2 \cos 2\xi + \dots + c_n \cos n\xi}{c_1 \sin \xi + c_2 \sin 2\xi + \dots + c_n \sin n\xi}$$

не может быть непрерывной на интервале $0 \leq \xi \leq \pi$. (Попробуйте отождествить эту функцию с функцией a в общей теории.)

30. Покажите, что ¹⁾

$$\int_{-1}^{*-k} + \int_k^{*1} \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} \frac{dy}{y-x} =$$

$$= \int_{-1}^{*-k} + \int_k^{*1} \frac{|y|}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} \frac{dy}{y-x} \equiv 0 \quad (0 < k < 1).$$

31. Решите нелинейное интегральное уравнение ²⁾

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 (x+y) \varphi^2(y) dy = 0.$$

32. Исследуйте нелинейную дифференциальную систему

$$y'' = \lambda \frac{x}{y}, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

преобразуя ее в интегральное уравнение типа Гаммерштейна.

¹⁾ Tricomi F., *Z. angew. Math. Ph.*, 2 (1951), 402—406.

²⁾ Richard, *Atti Accad. Sci. Torino*, 78 (1943), 293—311.

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

А д е м а р Р. (d' A d h é m a r R.)

- [1] L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann, Paris, 1909.

А й н с Е. (I n c e E. L.)

- [2] Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Б о х е р М. (B ô c h e r M.)

- [3] An introduction to the study of integral equations, Cambridge Tracts, № 10, 1909.

Б ю к н е р Г. (B ü c k n e r H.)

- [4] Die praktische Behandlung von Integralgleichungen, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952.

В е й л ь Г. (W e y l H.)

- [5] Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorem, Göttingen, 1908.

В и а р д а Г. (W i a r d a G.)

- [6] Интегральные уравнения, М., 1933.

В и в а н т и Ж. (V i v a n t i G.)

- [7] Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, Milano, 1916; нем. изд. Hannover, Helwingsche Verlag, 1929.

¹⁾ Этот список литературы охватывает только *книги и монографии* по интегральным уравнениям и некоторым связанным с ними вопросам. Дальнейшие указания относительно отдельных статей читатель найдет в примечаниях к тексту книги, хотя все это далеко от современной библиографии по интегральным уравнениям. Большой список литературы по данному предмету (примерно до 1928 г.) имеется в книге Виванти [7]; он охватывает около пятисот статей. Книга Дейвиса [13] тоже содержит богатую библиографию, примерно того же объема и за тот же период. В настоящее время полный список литературы содержал бы, вероятно, больше тысячи названий и, следовательно, был бы почти бесполезным, если бы он был составлен без надлежащей тщательности.

[Звездочкой отмечены книги, добавленные переводчиками.—
Прим. ред.]

- Винтнер А. (Wintner A.)
[8] Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig, 1929.
- Вольтерра В., Пере Ж. (Volterra V., Pérés J.)
[9] Théorie générale des fonctionnelles, t. 1, Paris, 1936.
- Гамель Г. (Hamel G.)
[10] Integralgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch, 2 Aufl., Berlin, 1949.
- Гильберт Д. (Hilbert D.)
[11] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.
- Гурса Э. (Goursat É.)
[12] Курс математического анализа, т. 3, ч. II, М., 1934.
- Дейвис Г. (Davis H. T.)
[13] The present status of integral equations, Indiana Univ. Studies, № 70, 1926.
[14] The theory of the Volterra integral equation of second kind, Indiana Univ. Studies, № 7, 1930.
- Дёч Г. (Doetsch G.)
[15] Theorie und Anwendung der Laplace-transformation, Berlin, 1937; New York, 1943.
[16] Handbuch der Laplace-transformation, Basel, Bd. 1, 1950; Bd. 2, 1955; Bd. 3, 1956.
- Жане М. (Janet M.)
[17] Équations intégrales et applications à certaines problèmes de la physique mathématique, Mémor. Sciences, Math., № 101—102, Paris, 1941.
- Заанен А. (Zaanen A. C.)
[18] Linear analysis. Measure and Integral. Banach and Hilbert Spaces, Linear Integral Equations, Bibl. Math., Amsterdam, 1953.
- Качмаж С. и Штейнгауз Г. (Kaczmarz S. und Steinhaus H.)
[19] Теория рядов по ортогональным системам, М., 1958.
- Карлеман Т. (Carleman T.)
[20] Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala, Univ. Årsskrift, № 3, 1923.
- Кнезер А. (Kneser A.)
[21] Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2 Aufl., Braunschweig, 1922.
- Кноп К. (Knopp K.)
[22] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3 Aufl., Berlin, 1931; англ. изд. London, Glasgow, 1928.
- Ковалевский Г. (Kowalewski G.)
[23] Integralgleichungen, Berlin, 1930.

Коллатц Л. (Collatz L.)

- [24] Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig, 1946; New York, 1948.

Корн А. (Korn A.)

- [25] Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

Краль Ж. и Эйнуди Р. (Kral G., Einaudi R.)

- [26] Meccanica tecnica delle vibrazioni, t. 1, 2, Bologna, 1940.

Курант Р. и Гильберт Д. (Courant R. Hilbert D.)

- [27] Методы математической физики, т. I, изд. 3-е, М.—Л., 1951.

Лалеско Т. (Lalesco T.)

- [28] Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris, 1922.

Ловитт У. (Lovitt W. V.)

- [29] Линейные интегральные уравнения, изд. 2-е, М., 1957.

Михлин С. Г.

- [30] *Интегральные уравнения, изд. 2-е, М., 1949.

Морс Ф. (Morse Ph. M.)

- [31] Vibration and Sound, New York, 1936.

Мусхелишвили Н. И.

- [32] Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946.

Наварро Б. (Navarro Barrás F.)

- [33] Conferencias sobre la teoria de las ecuaciones integrales (lineales y no-lineales), Cons. Sup. investig. Cientificas, Madrid, 1942.

Нейманн Дж. (v. Neumann J.)

- [34] Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators, Actualités scient. indust. № 229, Paris, 1935.

Палей Р., Винер Н. (Paley R. E. A. C., Wiener N.)

- [35] Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc., Coll. publ., № 19, New York, 1934.

Петровский И. Г.

- [36] Лекции по теории интегральных уравнений, М., 1951.

Пиконе М. (Picone M.)

- [37] Appunti di analisi superiore, Napoli, 1940.

Полиа Г., Сеге Г. (Pólya G., Szegő G.)

- [38] Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Ann. Math. Studies, № 27, Princeton, 1951.

Привалов И. И.

- [39] *Интегральные уравнения, изд. 2-е, М.—Л., 1937.

Р и с с Ф. (R i e s z F.)

- [40] Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913.

С е р е Г. (S z e g ö G.)

- [41] Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., Coll. publ., № 23, New York, 1939.

С м и р н о в В. И.

- [42]* Курс высшей математики, т. 4, изд. 3-е, М., 1953.

С т о у н М. (S t o n e M. H.)

- [43] Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc., Coll. publ., № 15, New York, 1932.

Т и т ч м а р ш Е. К. (T i t c h m a r s h E. C.)

- [44] Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.
[45] Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford, 1946 (готовится русский перевод).

Т р и к о м и Ф. (T r i c o m i F. G.)

- [46] Lezioni di analisi matematica, 1, 2, 7th ed., Padova, 1956.
[47] Equazioni differenziali, 2nd ed., Torino, 1953.
[48] Serie ortogonali di funzioni, Torino, 1948.
[49] Lezioni sulle equazioni integrali, Torino, 1954.
[50] Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

У и д д е р Д. (W i d d e r D. V.)

- [51] The Laplace transform, Princeton, 1946.

У и т т е к е р Е. Т. и В а т с о н Г. Н. (W h i t t a k e r E. T. and W a t s o n G. N.)

- [52] Курс современного анализа, ч. I, М.—Л., 1934.

Ф р а н к П. и М и з е с Р. (F r a n k P. und v. M i s e s R.)

- [53] Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, М., 1937.

Х а р д и Дж., Литтльвуд Дж. Е. и Полиа Г. (H a r d y G. H., L i t t l e w o o d J. E. and P ó l y a G.)

- [54] Неравенства, М., 1948.

Х е л л и н г е р Е. и Т е п л и ц О. (H e l l i n g e r E. und T o e l i t z O.)

- [55] Encyklopädie der math. Wiss. Bd. 2, Hefte 3, 1927, S. 1335—1601.

Х е й в у д Г. В. и Ф р е ш е М. (H e y w o o d H. B. et F r è c h e t M.)

- [56] L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique, 3-e ed., Paris, 1923.

Х и л л Э. (H i l l e E.)

- [57] Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951.

Х о х е н е м з е р Р. (H o h e n e m s e r R.)

- [58] Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik, Ergebnisse der Math., 1⁴, Berlin, 1932.

Ш м е й д л е р В. (S c h m e i d l e r W.)

- [59] Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig, 1950.

Э в а н с Дж. (E v a n s G. C.)

- [60] Functionals and their applications, Amer. Math. Soc. Coll. publ., № 5, New York, 1918.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие к английскому изданию	6
Глава I. Уравнения Вольтерра	9
1.1. Задача механики, приводящая к интегральному уравнению	9
1.2. Интегральные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений	11
1.3. Уравнения Вольтерра	14
1.4. L_2 -ядра и L_2 -функции	18
1.5. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода	21
1.6. Уравнение Вольтерра первого рода	27
1.7. Пример	29
1.8. Интегральные уравнения Вольтерра и линейные дифференциальные уравнения	31
1.9. Уравнения типа свертки	37
1.10. Поперечные колебания балки	42
1.11. Приложение к функциям Бесселя	49
1.12. Некоторые обобщения теории уравнений Вольтерра	56
1.13. Нелинейные уравнения Вольтерра	61
Глава II. Уравнения Фредгольма	69
2.1. Решение методом последовательных приближений. ряд Неймана	69
2.2. Пример	74
2.3. Уравнения Фредгольма с ядрами Пинкерле — Гурса	76
2.4. Теорема Фредгольма для ядер общего вида	87
2.5. Формулы Фредгольма	89

2.6. Численное решение интегральных уравнений . . .	100
2.7. Решение задачи Дирихле методом Фредгольма . . .	102
Глава III. Симметричные ядра и ортогональные системы функций	
3.1. Предварительные замечания и процесс ортогонализации.	107
3.2. Приближение и сходимость в среднем	110
3.3. Теорема Рисса — Фишера	116
3.4. Полнота и замкнутость	119
3.5. Полнота системы тригонометрических функций и многочленов	126
3.6. Приближение L_2 -ядра общего вида PG -ядрами	130
3.7. Метод Энскогога	132
3.8. Спектр симметричного ядра	135
3.9. Билинейная формула.	140
3.10. Теорема Гильберта — Шмидта и ее приложения	145
3.11. Экстремальные свойства и оценки собственных значений	155
3.12. Положительные ядра; теорема Мерсера	162
3.13. Связь с теорией линейных дифференциальных уравнений	166
3.14. Критические скорости вращающегося вала и поперечные колебания балки.	177
3.15. Симметричные уравнения Фредгольма первого рода	185
3.16. Приведение уравнения Фредгольма к уравнению Фредгольма с симметричным ядром	188
3.17. Некоторые обобщения.	195
3.18. Колебания мембраны.	199
Глава IV. Некоторые типы сингулярных и нелинейных интегральных уравнений	
4.1. Общие замечания и примеры	207
4.2. Уравнения, содержащие интегралы в смысле главного значения по Коши, и преобразование Гильберта	213
4.3. Преобразование Гильберта на конечном интервале и уравнение профиля крыла самолета	222
4.4. Сингулярные интегральные уравнения типа Карлемана	237

4.5. Общие замечания о нелинейных интегральных уравнениях	251
4.6. Нелинейные уравнения типа Гаммерштейна	257
4.7. Вынужденные колебания конечной амплитуды . .	272
<i>П р и л о ж е н и е</i> I. Системы линейных алгебраических уравнений	278
<i>П р и л о ж е н и е</i> II. Теорема Адамара	283
<i>Упражнения</i>	286
<i>Литература</i>	292

Ф. Т р и к о м и
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *И. В. ГЛАТЕНОК*
Технический редактор *В. П. Рыбкина*
Корректор *И. П. Максимова*

Сдано в производство 1/IX—59 г.
Подписано к печати 6/I—60 г.
Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 4,7$ бум. л.
15,4 печ. л.
Уч.-изд. л. 13,9. Изд. № 1/4605
Цена 11 р. 75 к. Зак. 1216

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9